

**Dreidimensionale kinematische Modelle  
zur Analyse von Deformationen  
an Hängen**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**DOKTOR-INGENIEURS**

von der Fakultät für

**Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)**

vorgelegte

**DISSERTATION**

von

**Dipl.-Ing. Paul Rawiel  
aus Schramberg**

**Tag der mündlichen Prüfung: 8.12.2000  
Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. G. Schmitt  
Korreferent: Prof. Ir. J. van Mierlo  
Karlsruhe 2000**

---

## Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Verfahren zur Deformationsanalyse entwickelt, die es ermöglichen, Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in jedem beliebigen Punkt des zu untersuchenden Objekts für jede beliebige Zeit zu berechnen. Weiterhin können durch das Verfahren Deformationsmaße wie Dehnungen, Gleitungen und Rotationen in der infinitesimalen Umgebung der Punkte berechnet werden.

Das Hauptproblem hierbei besteht in der Realisierung eines kontinuierlichen Körpers aus geodätischen Messungen an diskreten Punkten, um die Theorien der Kontinuumsmechanik anwenden zu können. Ein Schwerpunkt liegt daher in der theoretischen Beschreibung der Kinematik des Kontinuums sowie in der theoretischen Erörterung einiger Interpolationsverfahren, die für eine Lösung des Problems geeignet sind. Insbesondere werden Monome, Bernstein-Polynome sowie die verallgemeinerten Bernstein-Polynome als Basisfunktionen für die Interpolation mit bivariaten Polynomen, Tensorprodukt-Bézier-Flächen sowie Dreiecks-Bézier-Flächen vorgestellt und verglichen.

Die theoretischen Überlegungen werden anhand von Beispieldatensätzen des Blockgletschers Macun I getestet. Die Ergebnisse aus der Modellierung des Kontinuums werden in Form von konkreten Zahlenwerten und graphischen Darstellungen präsentiert und diskutiert. Es werden Vorschläge zu verfeinerten Modellansätzen aufgrund neuer Erkenntnisse erarbeitet sowie Schnittstellen zur Erweiterung der Modelle für die Integration zusätzlicher hybrider Daten aufgezeigt.

Darüber hinaus werden Möglichkeiten für einen Übergang von den verwendeten kinematischen Modellen auf die dynamischen vorgestellt.

## Abstract

In the present work methods for deformation analysis are developed, that allow the calculation of shifts, velocities and accelerations in any point of the object for any time. Furthermore, deformation measures, such as expansions, shearing strains and rotations in the infinitesimal environment of the points can be calculated.

The main problem consists in the implementation of a continuous body from geodetic measurements at discrete points, in order to be able to apply the theories of continuum mechanics. Therefore, one focus is put on the theoretical description of the kinematics of the continuum as well as on the theoretical discussion of some interpolation methods, which are suitable for a solution of the problem. In particular, monomials, Bernstein polynomials as well as the generalized Bernstein polynomials as basis functions for the interpolation with bivariate polynomials, tensor product Bézier surfaces as well as triangle Bézier surfaces are presented and compared.

The theoretical considerations are tested with example data records of the rock glacier Macun I. The results of the modelling of the continuum are presented in form of concrete numerical values and diagrams and are discussed. Suggestions on refined basic approaches for the model on the basis of new realizations are developed and interfaces for the extension of the models in order to allow the integration of additional hybrid data are pointed out.

Beyond that, possibilities are presented for a transition of the used kinematic models to the dynamic models.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Bezeichnungen und Symbole</b>	<b>7</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>9</b>
<b>2 Kontinuumsmechanik</b>	<b>11</b>
2.1 Kinematik des Kontinuums	11
2.1.1 Materielle Körper und ihre Bewegungsmöglichkeiten	11
2.1.2 Deformationen	12
2.1.3 Infinitesimale Deformationen und Deformationsgradienten	15
2.2 Zusammenfassung	17
<b>3 Übergang von diskreten Objektpunkten zum Kontinuum</b>	<b>18</b>
3.1 Basisfunktionen zur Interpolation	18
3.1.1 Monome als Basisfunktionen	18
3.1.2 Bernstein-Polynome als Basisfunktionen	18
3.1.3 Polynom-Kurven versus Bézier-Kurven	20
3.2 Interpolation der Zeitfunktionen	21
3.2.1 Polynome	21
3.2.2 Trigonometrische Funktionen	22
3.2.3 Kombination verschiedener Funktionen	23
3.3 Flächenhafte Interpolation der Koeffizienten der Zeitfunktion	23
3.3.1 Bivariate Polynome	23
3.3.2 Bikubische Monomsplines	24
3.4 Interpolation der Koeffizienten der Zeitfunktion durch Splineflächen	25
3.4.1 Tensorprodukt-Flächen	25
3.4.2 Anschlussbedingungen für Tensor-Produkt-Bézier-Flächen	28
3.4.3 Dreiecks-Bézier-Flächen	30
3.4.4 Anschlussbedingungen für Dreiecks-Bézier-Flächen	34
3.4.5 Bestimmung der Unbekannten durch Ausgleichung	37
<b>4 Testrechnung mit realen Daten am Beispiel des Macungletschers in der Schweiz</b>	<b>40</b>
4.1 Gletscher und ihre Bewegung	40
4.2 Der Blockgletscher Macun I	41
4.3 Wahl des Koordinatensystems	45
4.4 Übergang von den Epochenkoordinaten zum Kontinuum	45
4.4.1 Zeitfunktionen	46
4.4.2 Interpolation der Koeffizienten der Zeitfunktion	54
4.4.3 Ergebnisse der Interpolationen	55
4.5 Berechnung von Deformationsmaßen	62
4.5.1 Dehnungen und Gleitungen	64
4.5.2 Rotationen	69
4.5.3 Hauptdehnungen und Hauptdehnungsrichtungen	72
<b>5 Beurteilung der Modellansätze</b>	<b>74</b>
<b>6 Möglichkeiten zur Erweiterung der hier vorgestellten Modelle</b>	<b>75</b>
6.1 Signalverarbeitung zur Bestimmung der Zeitfunktionen	75
6.2 Erweiterung von $\bar{u}(X, Y, t)$ nach $\bar{u}(X, Y, Z, t)$	75
6.3 Einführung kinetischer Größen und Übergang zum dynamischen Modell	76
<b>7 Zusammenfassung</b>	<b>78</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>80</b>

<b>Anhang A</b>	<b>84</b>
Komponenten der Bewegungsfunktionen in Abhängigkeit der Koordinaten . . . . .	84
<b>Anhang B</b>	<b>84</b>
Objektklassen für die Erstellung der Programme in C++ für die Beispielrechnung . . . . .	84
B.1 Einleitung . . . . .	84
B.2 Die Klassen . . . . .	84
B.2.1 koo3d . . . . .	84
B.2.2 def_punkt3d . . . . .	93
B.2.3 kin_punkt3d . . . . .	95
B.2.4 def_project . . . . .	96
B.3 Funktionen . . . . .	97
B.3.1 erste_epoche(list<def_punkt3d> Punktliste) . . . . .	97
B.3.2 flaechen_parameter(ColumnVector X, ColumnVector Y, ColumnVector l) . . . . .	98
B.3.3 Funktionen zur dxf-Ausgabe . . . . .	98

## Abbildungsverzeichnis

2.1 Deplatzierung eines materiellen Punktes (LENZ [51]) . . . . .	11
2.2 Allgemeine Bewegung (LENZ [51]) . . . . .	13
2.3 Bedeutung der Komponenten des Deformationstensors (LENZ [51]) . . . . .	16
3.1 Bernstein-Polynome 3. Grades. . . . .	19
3.2 3D-Polygon mit zugehöriger Bézier-Kurve. . . . .	20
3.3 Verlauf von Bézier-Kurven und Polynomen bei Änderung eines Koeffizienten . . . . .	21
3.4 Bézier-Netz mit zugehöriger Bézier-Fläche vom Grad 4,4. . . . .	28
3.5 Bezeichnung benachbarter Bézier-Flächenstücke. . . . .	29
3.6 Situation an den Punkten vier aufeinandertreffender Flächenstücke des Splineverbandes . . . . .	30
3.7 Baryzentrische Koordinaten. . . . .	32
3.8 Basisfunktionen $B_{012}^3$ und $B_{021}^3$ (aus BANGERT ET AL [5]). . . . .	33
3.9 Geometrische Deutung der Ableitungen nach $u$ und $v$ (HOSCHEK UND LASSER [41]). . . . .	35
3.10 Geometrische Deutung der $C^1$ -Stetigkeit. . . . .	36
3.11 Anordnungen von Bézier-Spline-Dreiecken. . . . .	38
4.1 Schematischer Längsschnitt durch einen alpinen Gletscher. . . . .	40
4.2 Verschiedene Arten von Spalten in einem Gletscher. (aus KLOSTERMANN [46]). . . . .	41
4.3 Blockgletscher Macun I (Aufnahme J. BAADA, aus BARSCH UND ZICK [9]). . . . .	42
4.4 Lage der Punkte auf dem Gletscher (aus ZICK [78]). . . . .	44
4.5 Lage des gewählten Koordinatensystems. . . . .	46
4.6 Bewegungsfunktionen von Punkt 10 und Punkt 40 . . . . .	48
4.7 Lineare Bewegungskomponenten der Punkte in Abhängigkeit der $X$ -Koordinate . . . . .	50
4.8 Geschwindigkeiten der Punkte im Jahr 1989 in Abhängigkeit der $X$ -Koordinate . . . . .	52
4.9 Verschiebungen der Punkte in $Z$ -Richtung in Abhängigkeit der $X$ -Koordinate . . . . .	52
4.10 Lineare Bewegungskomponenten der Punkte in Abhängigkeit von $X$ und $Y$ . . . . .	53
4.11 Interpolierende Fläche durch die $Z$ -Werte der Datenpunkte. . . . .	56
4.12 Komponenten des Verschiebungsvektors $\bar{u}$ für $t = 22$ (1987). . . . .	57
4.13 Komponenten des Verschiebungsvektors $\bar{u}$ für $t = 22$ , kontinuierlich als Flächen dargestellt. . . . .	58
4.14 Differenz zwischen aus Messungen abgeleiteten und interpolierten $x_1$ -, $x_2$ - und $x_3$ -Koordinaten für das Jahr 1977 . . . . .	59
4.15 Verschiebungsvektorzüge der Objektpunkte von 1977 - 1994 . . . . .	63
4.16 Dehnungen in $X$ -Richtung (a) und in $Y$ -Richtung (b). . . . .	65
4.17 Dehnungen in $X$ - und $Y$ -Richtung in Abhängigkeit der Lage. . . . .	66
4.18 Gleitungen in der $X$ - $Y$ -Ebene (a), in der $X$ - $Z$ -Ebene (b) und in der $Y$ - $Z$ -Ebene (c). . . . .	67
4.19 Schematische Darstellung der Auswirkung von Gleitungen auf ein Quadrat links und rechts des Stromstrichs. . . . .	68
4.20 Darstellung der Drehvektoren $\bar{\omega}$ . . . . .	70

4.21	Schematische Darstellung des Drehsinns der Rotationsvektoren $\bar{\omega}$ .	71
4.22	Darstellung der Linie, auf der keine Rotation um die $Z$ -Achse auftritt.	71
4.23	Hauptdehnungsrichtungen im Gletscher.	73
6.1	Newtonsches Fließen (LENZ [50]).	76
A.1	Quadratische Bewegungskomponenten in Abhängigkeit von $X$ .	85
A.2	Bewegungskomponenten 3. Grades in Abhängigkeit von $X$ .	86
A.3	Lineare Bewegungskomponenten in Abhängigkeit von $Y$ .	87
A.4	Quadratische Bewegungskomponenten in Abhängigkeit von $Y$ .	88
A.5	Bewegungskomponenten 3. Grades in Abhängigkeit von $Y$ .	89
A.6	Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\bar{v}$ für $t = 22$ .	90
A.7	Komponenten des Beschleunigungsvektors $\bar{a}$ für $t = 22$ .	91
A.8	Linie, auf der die Rotation um die $X$ -Achse zu null wird.	92
A.9	Linie, auf der die Rotation um die $Y$ -Achse zu null wird.	92

## Tabellenverzeichnis

3.1	Basisfunktionen für Polynome mit zwei Variablen.	24
4.1	Durchschnittsgeschwindigkeiten der Bewegungen in den einzelnen Gletscherbereichen	43
4.2	Koordinaten der Festpunkte.	45
4.3	Tendenz der Bewegung in $Z$ -Richtung mit der zugehörigen Bewegungsrate in der $X - Y$ -Ebene.	49
4.4	Abweichungen der interpolierten und der direkt aus den Messungen abgeleiteten Koordinaten in den Jahren 1977 und 1994.	61
4.5	Durchschnittliche Abweichungen der interpolierten von den aus Messungen ermittelten Koordinaten in den Jahren 1977 und 1994.	62
4.6	Extremwerte für Gleitungen.	68

# Bezeichnungen und Symbole

Matrizen sind in Großbuchstaben, Vektoren in Kleinbuchstaben und kursiv mit einem Überstrich symbolisiert. Eine Ausnahme bilden hier die Buchstaben  $\bar{U}$ ,  $\bar{V}$  und  $\bar{W}$ , die in Kapitel 3.4.3 für die Koordinatenvektoren der Dreieckspunkte zur besseren Unterscheidung von den baryzentrischen Koordinaten  $u$ ,  $v$  und  $w$  benutzt werden. Skalare Größen sind mit Klein- oder Großbuchstaben und kursiv bezeichnet. Die materiellen Koordinaten  $\xi_i$  mit  $i = 1, 2, 3$  aus Kapitel 2 werden in Kapitel 4 zu  $X, Y$  bzw.  $Z$ , was eher der Terminologie in der Geodäsie entspricht. Tensoren 2. Stufe sind in Großbuchstaben und kursiv mit Unterstrich dargestellt. Tensoren 4. Stufe sind in Großbuchstaben und kursiv mit zweifachem Unterstrich bezeichnet.

Wichtige Begriffe und Fachausdrücke aus der Kontinuumsmechanik werden bei ihrer ersten Verwendung kursiv geschrieben.

Die Bezeichnungen links und rechts in Kapitel 4 bedeuten immer in Fließrichtung (orographisch) links bzw. rechts.

## Bezeichnungen aus der Kontinuumsmechanik

$\bar{e}_i$	Basisvektoren eines dreidimensionalen, kartesischen Koordinatensystems
$\bar{\xi}$	materielle (oder Lagrangesche) Koordinaten
$\bar{x}$	räumliche (oder Eulersche) Koordinaten
$\mathcal{M}$	materieller Körper
$\partial\mathcal{M}$	Oberfläche eines materiellen Körpers
$\bar{u}(\bar{\xi}, t)$	Verschiebungsvektorfeld
$\bar{v}(\bar{\xi}, t)$	Geschwindigkeitsvektorfeld
$\bar{a}(\bar{\xi}, t)$	Beschleunigungsvektorfeld
$\underline{F}$	Deformationsgradiententensor
$J$	Jakobische Funktionaldeterminante
$\underline{C}$	rechter Cauchy-Green Tensor
$\underline{B}$	linker Cauchy-Green Tensor
$\underline{E}$	Greenscher Verzerrungstensor
$\underline{\varepsilon}$	infinitesimaler Deformationstensor
$\underline{\Omega}$	infinitesimaler Drehtensor
$\underline{\sigma}$	Spannungstensor
$\underline{\underline{C}}$	Tensor der Steifigkeiten

## Symbole

$t$	Skalar
$\bar{a}$	Vektor
$\bar{A}$	Matrix
$\underline{A}$	Tensor 2. Stufe
$\underline{\underline{A}}$	Tensor 4. Stufe
$\delta_{ij}$	Kroneckersymbol
$e_{ijk}$	dreifach indiziertes Permutationssymbol
$\circ$	inneres Produkt
$\times$	Kreuzprodukt
$\otimes$	Tensorprodukt
$\nabla$	Nablaoperator
Grad $\bar{u}$	Gradient eines Vektorfeldes $\bar{u}$
rot $\bar{u}$	Rotation eines Vektorfeldes $\bar{u}$

---

$\operatorname{div} \bar{u}$	Divergenz eines Vektorfeldes $\bar{u}$
$\in$	Element von
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall von $a$ bis $b$ , mit $a < b$ .
$\vee$	Oder-Verknüpfung zweier Mengen
$B_k^n(t)$	Bernstein-Polynome n-ten Grades
$\bar{b}_i$	Bézier-Punkte einer Bézier-Kurve
$\bar{b}_{ik}$	Bézier-Punkte einer Tensorprodukt-Bézier-Fläche
$B_{ijk}^n(u, v, w)$	verallgemeinerte Bernstein-Polynome
$\bar{b}_{ijk}$	Bézier-Punkte einer Dreiecks-Bézier-Fläche

---

# 1 Einleitung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein Verfahren zu entwickeln, das die Analyse von Deformationen an Hangrutschungen mit Hilfe dreidimensionaler kinematischer Modelle ermöglicht. Diese Modelle sollen die Berechnung von Deformationsmaßen für beliebige Punkte eines Kontinuums auf der Basis geodätischer Messungen ermöglichen. Dies wurde bisher entweder nur zweidimensional oder nur für diskrete Objektpunkte durchgeführt.

Allgemeine Bemerkungen zur Deformationsanalyse und Verweise auf bisher durchgeführte Untersuchungen auf diesem Gebiet finden sich in diesem Kapitel.

Grundlage für die kinematischen Modelle und die Berechnung von Deformationsmaßen wie Dehnung, Gleitung und Rotation in jedem beliebigen Punkt des Objekts ist die Kontinuumsmechanik. Die Theorie hierzu wird in Kapitel 2 behandelt.

Um auf der Basis geodätischer Messungen ein Kontinuum realisieren zu können, muss aus den berechneten Koordinaten der diskreten Objektpunkte ein Verschiebungsvektorfeld ermittelt werden, das die Verschiebungen kontinuierlich in Abhängigkeit der Koordinaten und der Zeit angibt. Hierfür muss durch die Messungen an den einzelnen Punkten sowohl räumlich als auch zeitlich interpoliert werden. In Kapitel 3 werden einige in Frage kommende Interpolationsmöglichkeiten theoretisch aufgearbeitet und diskutiert.

Die theoretischen Überlegungen und Ableitungen aus den Kapiteln 2 und 3 werden dann in Kapitel 4 mit realen Messdaten am Beispiel des Blockgletschers Macun I im Unterengadin in der Schweiz getestet. Die Daten aus den einzelnen Messepochen haben bereits bestimmte Auswerteschritte vorab durchlaufen. Die Untersuchung der Stützpunkte auf Stabilität war abgeschlossen und auch das Datumsproblem war bereits gelöst. Die Grundlage hierfür bildet die statische Deformationsanalyse. Aus den Koordinaten von Objektpunkten aus neun Messepochen wurde durch zeitliche und räumliche Interpolation ein kontinuierlicher Körper modelliert, in dem alle Größen der Kinematik des Kontinuums berechnet werden können. Die berechneten Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sowie die ermittelten Deformationsmaße werden sowohl graphisch als auch in Form von Zahlenwerten dargestellt und diskutiert. In Kapitel 5 werden die verwendeten Modellansätze abschließend diskutiert.

Ferner werden in Kapitel 6 Schnittstellen aufgezeigt, die eine Integration hybrider Daten erlauben und es werden Möglichkeiten zur Erweiterung auf ein dynamisches Modell vorgestellt. Damit stellen die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit ein Bindeglied zwischen den statischen und den dynamischen Modellen dar. In Kapitel 7 findet sich schließlich die Zusammenfassung der Arbeit.

## Allgemeine Bemerkungen zur Deformationsanalyse

Die Deformationsanalyse zur Erfassung von Veränderungen in der Geometrie eines Objekts ist eine wesentliche Aufgabe der Ingenieurvermessung. Anwendungen finden sich im Ingenieurbau z. B. an Staudämmen, Erddämmen, Brücken oder Bauwerken (BÄUMKER UND FITZEN [15] und HECK UND MEIER-HIRMER [39]), in der Geologie und der Geotechnik bei der Überwachung von Gletschern, Hängen und Muren (ROHN [58] und SCHMITT UND RAWIEL [63]) oder auch in der Erfassung von länderübergreifenden Deformationen der Erdkruste (HECK [38]).

Mit Hilfe von geodätischen Messungen zu Punkten, die das Objekt möglichst gut repräsentieren, werden Änderungen in deren Lage festgestellt und von diesen Änderungen wird wiederum auf die Änderungen in der Geometrie des Objekts geschlossen. Die Gesamtheit der Punkte, die für die Deformationsanalyse gemessen werden, nennt man das Deformationsnetz. Hierbei wird zwischen „absoluten“ und „relativen“ Netzen unterschieden.

Bei Deformationsnetzen zur Überwachung absoluter Deformationen kann die Gesamtmenge aller Netzpunkte in eine Untermenge von Stützpunkten und eine Untermenge von Objektpunkten eingeteilt werden. Das a priori als stabil angenommene Teilnetz der Stützpunkte dient als Stützpunktfeld, auf das sich die ermittelten Verschiebungen in den Objektpunkten beziehen. Die Stützpunkte definieren das Datum für die Ausgleichung einer

Epoche. Relative Deformationsnetze finden hauptsächlich in der Untersuchung von geodynamischen Prozessen Anwendung. Bei diesen Netzen ist eine Unterteilung der Punktmenge in Stütz- und Objektpunkte nicht möglich. Es können lediglich Gebiete abgegrenzt werden, die ein homogenes Deformationsverhalten erwarten lassen.

Wissenschaftliche Untersuchungen zur statischen Deformationsanalyse, zur Identifizierung instabiler Stützpunkte, zur Verschiebung von Einzelpunkten und zur Veränderung der Netzgeometrie wurden unter anderem von NIEMEIER [54], HECK [36], HECK [37], CHEN ET AL [19] und NKUITE [55] durchgeführt. Hierbei wurden die größten Probleme der geometrischen Analyse und der Suche nach instabilen Stützpunkten weitgehend gelöst.

Ausführungen mit kinematischen Modellen zur Analyse von Deformationen finden sich bei VAN KHOAN [75] und ZIPPELT [79], wobei Bewegungsfunktionen für Einzelpunkte geschätzt werden.

Um komplexere Objektverformungen und deren Ursachen nachweisen zu können, werden neben geodätischen auch geotechnische Messinstrumente verwendet, die relative Lageänderungen von Punkten am Objekt erfassen. Außerdem werden physikalische Größen, wie z. B. Temperatur und Druck gemessen (TESKEY [73]). In den letzten Jahren wurden Modelle und Verfahren entwickelt, welche diese hybriden Daten in die Deformationsanalyse einbeziehen. In TESKEY [73] wurde ein integriertes Modell zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Erddämmen mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode entwickelt. In HEINE [40] wurden Volterra- und Fuzzy-Modelle sowie Neuronale Netze verwendet, um Deformationen auf der Basis der Systemtheorie als physikalischen Prozess zu beschreiben. Mit solchen Verfahren, die einen kausalen Zusammenhang von Ursache und Wirkung eines Deformationsprozesses herstellen, wird erreicht, dass die Deformationsanalyse nicht auf diskrete Punkte, an denen Messungen durchgeführt werden, beschränkt bleibt, sondern das Objekt als Ganzes (als Kontinuum) betrachtet werden kann.

In der Kontinuumsmechanik werden neben Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen von materiellen Punkten auch Dehnungen und Spannungen berechnet. Das klassische Anwendungsgebiet der Kontinuumsmechanik liegt in der Untersuchung des Verhaltens mechanisch und/oder thermisch beanspruchter Bauteile verschiedenster Konstruktionen. Meist sind hierbei sowohl die Materialeigenschaften als auch die einwirkenden Kräfte vorab bekannt. Auf dieser Basis werden mechanische und thermodynamische Bilanzgleichungen aufgestellt und unter bestimmten Annahmen für materialspezifisches Deformationsverhalten Bewegungen, Deformationen und Spannungen berechnet. Bei VULLIET UND HUTTER [76], VULLIET UND HUTTER [77] und HUTTER [43] finden sich Beispiele, in denen Hangrutschungen als Kontinua modelliert werden, jedoch ohne geodätische Messungen.

## 2 Kontinuumsmechanik

Da die Kontinuumsmechanik für Anwendungen in der Geodäsie ein bisher recht unbekanntes Fachgebiet darstellt, werden in diesem Kapitel die Grundlagen der verwendeten Theorien kurz erläutert und Möglichkeiten zur Berechnung von Deformationsmaßen aufgezeigt. Die Terminologie, die in diesem Kapitel benutzt wird, ist stark an die verwendete Fachliteratur angelehnt. Ausführlichere und weiter führende Erklärungen finden sich in BETTEN [10] sowie ALTENBACH UND ALTENBACH [3]. Für die mathematischen Zusammenhänge der Vektor- und Tensoranalysis wird auf SPIEGEL [70], CUNNINGHAM [20], SOKOLNIKOFF [68], ZURMÜHL UND FALK [80], ZURMÜHL UND FALK [81] sowie SPAIN [69] verwiesen.

### 2.1 Kinematik des Kontinuums

Die Aussagen zur Kinematik eines Kontinuums betreffen alle geometrischen Aspekte der Bewegung des materiellen Körpers. Bei deformierbaren Körpern sind hier, im Gegensatz zur Kinematik starrer Körper, neben der Translation und Rotation auch relative Lageänderungen der Körperpunkte, also die Verformung des Körpers, mit eingeschlossen. Somit haben die Aussagen über die lokalen Wirkungen von Deformationen eine besondere Bedeutung (ALTENBACH UND ALTENBACH [3]).

In der Literatur werden die Begriffe *Deformation* und *Verzerrung* unterschieden. Unter Deformationen werden alle Bewegungsmöglichkeiten eines Körpers verstanden. Wird die Gesamtbewegung um die Starrkörperbewegung reduziert und nur noch die Verformung des Körpers betrachtet, spricht man von Verzerrung (ALTENBACH UND ALTENBACH [3]).

#### 2.1.1 Materielle Körper und ihre Bewegungsmöglichkeiten

Unter einem materiellen Körper  $\mathcal{M}$  (mit der Oberfläche  $\partial\mathcal{M}$ ) versteht man eine zusammenhängende Menge von materiellen Punkten, die zu jedem Augenblick einen Teilbereich des dreidimensionalen Euklidischen Raumes überdecken (LENZ [51]). Man spricht von einer Bezugsplatzierung zum Zeitpunkt  $t = 0$ , die im Allgemeinen als unverformt angenommen wird, und einer Momentanplatzierung zum Zeitpunkt  $t > 0$ .

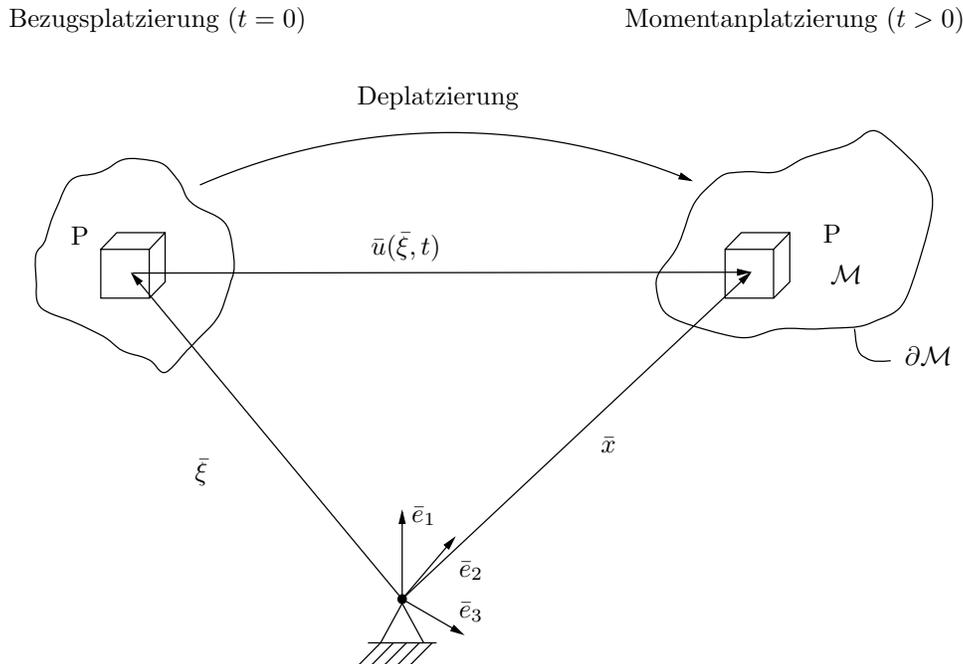


Abbildung 2.1: Deplatzierung eines materiellen Punktes (LENZ [51])

Bezeichnungen:  $\mathcal{M}$ : materieller Körper  
 $\partial\mathcal{M}$ : Oberfläche des materiellen Körpers  
 $\bar{u}(\bar{\xi}, t)$ : Verschiebungsvektorfeld

Die Bewegung des materiellen Körpers wird durch die Bewegung seiner materiellen Punkte beschrieben. Diese müssen identifizierbar sein, was durch die Zuordnung eines Ortsvektors  $\bar{x}$  zur Zeit  $t = 0$  in einem beliebigen dreidimensionalen Koordinatensystem zu jedem materiellen Punkt  $P$  des Körpers erreicht wird.

$$\bar{\xi} = \xi_i \bar{e}_i, \quad \xi_i : \text{materielle (oder Lagrangesche) Koordinaten}$$

Die Lage eines materiellen Punktes zu einem späteren Zeitpunkt  $t > 0$  in der Momentanplatzierung wird durch den ihm zugeordneten Ortsvektor beschrieben.

$$\bar{x} = x_i \bar{e}_i, \quad x_i : \text{räumliche (oder Eulersche) Koordinaten}$$

Der Zusammenhang zwischen den materiellen und den räumlichen Koordinaten wird durch eine Abbildung  $\bar{x} = \bar{\mathcal{X}}(\bar{\xi})$  realisiert. Wegen der Identifizierbarkeit der materiellen Punkte muss sowohl diese Abbildung als auch deren Umkehrung eindeutig sein. Man spricht dann von einer eindeutigen Funktion.

Die Abbildung

$$\bar{x} = \bar{\mathcal{X}}(\bar{\xi}), \quad \text{mit der vektorwertigen, eindeutigen Funktion } \bar{\mathcal{X}}$$

und die Umkehrabbildung

$$\bar{\xi} = \bar{\mathcal{X}}^{-1}(\bar{x})$$

müssen genügend oft stetig differenzierbar sein. Die Bewegung eines Körpers ist definiert durch eine Folge von Platzierungen mit der Zeit  $t$  als Kurvenparameter für die Bahnkurven der Bewegung und dem Vektor  $\bar{\xi}$  als Scharparameter für die materiellen Punkte des Körpers (LENZ [51], ALTENBACH UND ALTENBACH [3]).

$$\bar{x} = \bar{\mathcal{X}}(\bar{\xi}, t) \quad , \quad \bar{\mathcal{X}}(\bar{\xi}, t = 0) = \bar{\xi}.$$

Durch die Ableitung der Funktion  $\bar{\mathcal{X}}(\bar{\xi}, t)$  nach der Zeit  $t$  erhält man den Geschwindigkeitsvektor  $\bar{v}$  und den Beschleunigungsvektor  $\bar{a}$ .

Definition:

Geschwindigkeitsvektor  $\bar{v}$  desjenigen materiellen Punktes zur Zeit  $t$ , welcher zur Zeit  $t = 0$  an der Stelle  $\bar{\xi}$  lag:

$$\bar{v} = \dot{\bar{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathcal{X}}(\bar{\xi}, t) \quad \text{mit} \quad \bar{\xi} = \text{const.}$$

Definition:

Beschleunigungsvektor  $\bar{a}$  desjenigen materiellen Punktes zur Zeit  $t$ , welcher zur Zeit  $t = 0$  an der Stelle  $\bar{\xi}$  lag:

$$\bar{a} = \ddot{\bar{x}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\mathcal{X}}(\bar{\xi}, t) \quad \text{mit} \quad \bar{\xi} = \text{const.}$$

### 2.1.2 Deformationen

Nachdem mit den Gleichungen und Definitionen aus Abschnitt 2.1.1 die Bewegungen sowie die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen von materiellen Punkten eines Körpers beschrieben wurden, wird in diesem Abschnitt untersucht, wie sich die Bewegungen des Körpers auf sein lokales Deformationsverhalten auswirken. Hierzu wird der *Deformationsgradiententensor*  $\underline{F}$  eingeführt. Dieser Tensor liefert den Zusammenhang zwischen Linien-, Flächen- und Volumenelementen in der Bezugs- und in der Momentanplatzierung.

Für den Abstand zweier infinitesimal benachbarter Punkte  $A$  und  $P$  gilt bei der allgemeinen Bewegung:

$$d\bar{\xi} = \bar{\xi} - \bar{\xi}_A \quad \text{zur Zeit } t = 0 \text{ bzw.}$$

$$d\bar{x} = \bar{x} - \bar{x}_A \quad \text{zur Zeit } t > 0.$$

Der Vektor  $d\bar{\xi}$  lässt sich durch die lineare Abbildung  $\underline{F}$  in den Vektor  $d\bar{x}$  abbilden. Es gilt

$$d\bar{x} = \underline{F} d\bar{\xi}.$$

Mit  $\det \underline{F} \neq 0$  folgt, dass  $\underline{F}^{-1}$  existiert, also ist

$$d\bar{\xi} = \underline{F}^{-1} d\bar{x}$$

und mit  $d\bar{\xi} \neq 0$  ist somit  $\underline{F} d\bar{\xi} \neq 0$ .

Daraus folgt, dass zwei verschiedene materielle Punkte in der Bezugsplatzierung auch in zwei verschiedene materielle Punkte in der Momentanplatzierung abgebildet werden (LENZ [51]).

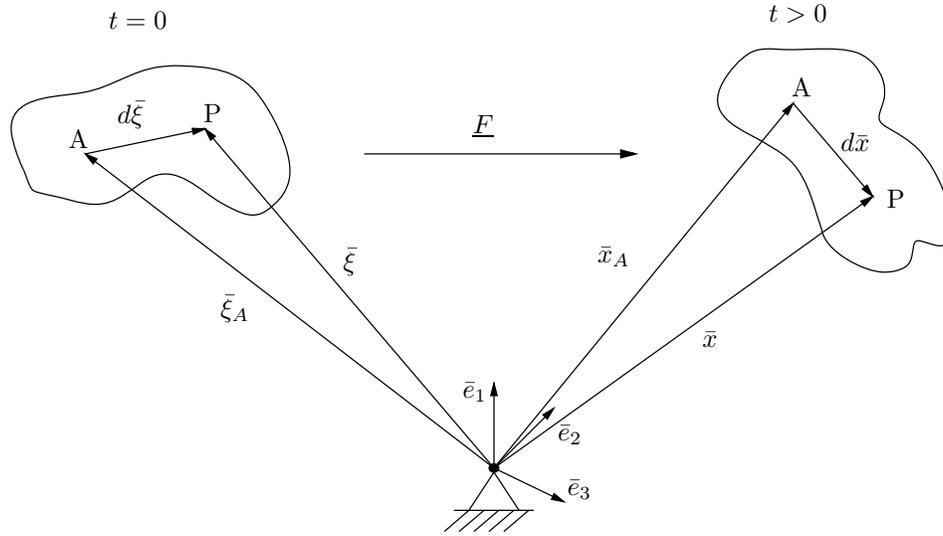


Abbildung 2.2: Allgemeine Bewegung (LENZ [51])

Es wird folgende Abkürzung eingeführt:

$$x_{i,k} := \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}$$

Für den infinitesimalen Abstand zweier benachbarter Punkte in der Momentanplatzierung gilt nun

$$\text{einerseits: } d\bar{x} = dx_i \bar{e}_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} d\xi_k \bar{e}_i = x_{i,k} d\xi_k \bar{e}_i \quad (2.1-1)$$

$$\text{und andererseits: } d\bar{x} = \underline{F} d\bar{\xi} = (F_{ik} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_k) d\xi_l \bar{e}_l = F_{ik} d\xi_k \bar{e}_i \quad (2.1-2)$$

Aus den Gleichungen 2.1-1 und 2.1-2 folgt

$$F_{ik} = x_{i,k} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}$$

Das Deformationsgradiententensorfeld  $\underline{F}$  kann damit folgendermaßen dargestellt werden:

$$\underline{F} = F_{ik} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_k = x_{i,k} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_k = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_k =: \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{\xi}} \quad (2.1-3)$$

Im Allgemeinen ist  $\underline{F}$  orts- und zeitabhängig:  $\underline{F} = \underline{F}(\bar{\xi}, t)$ . Ist  $\underline{F}$  ortsunabhängig, d.h.  $\underline{F} = \underline{F}(t)$ , wird der Tensor als *homogen* bezeichnet (LENZ [51]).

Orthogonale Tensoren vermitteln starre Abbildungen (Isometrien), d.h. sie lassen die Länge von Vektoren und den Winkel zwischen zwei Vektoren unverändert (LENZ [51]). Im Sonderfall der starren Bewegung wird  $\underline{F}$  demnach zum orthogonalen Tensor. Durch Testen auf Orthogonalität von  $\underline{F}$  kann man also bei einer Deformationsanalyse feststellen, ob es sich bei der Bewegung um eine Starrkörperbewegung handelt, oder nicht.

Ein materielles Volumenelement, welches sich mit der Zeit deformiert hat, lässt sich mit Hilfe des Deformationsgradiententensors in den neuen Zustand transformieren. Hierzu benötigt man zunächst das dreifach indizierte Permutationssymbol

$$e_{ijk} =: \begin{cases} 1 & \text{wenn } ijk = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2 \text{ (gerade Permutation)} \\ -1 & \text{wenn } ijk = 2, 1, 3; 3, 2, 1; 1, 3, 2 \text{ (ungerade Permutation)} \\ 0 & \text{sonst, (d.h. wenn mindestens zwei Ziffern gleich sind).} \end{cases}$$

Mit Hilfe der *Jakobischen Funktionaldeterminanten*  $J$ , welche nach

$$J := \det [\underline{F}] = e_{ijk} x_{i,1} x_{j,2} x_{k,3},$$

definiert ist, lassen sich materielle Volumenelemente nach

$$dV = J dV_0 = \det [\underline{F}] dV_0 \quad \text{mit} \quad J = \det [\underline{F}] = \frac{dV}{dV_0} = \frac{\varrho_0}{\varrho} > 0$$

transformieren (LENZ [51]). Für die Transformation eines materiellen Flächen- bzw. Linienelementes wird noch die Definition des *rechten Cauchy-Green Tensors*  $\underline{C}$  benötigt.

Definition:

Rechter Cauchy-Green Tensor  $\underline{C}$ :

$$\underline{C} := \underline{F}^T \underline{F}$$

Wegen

$$\underline{C}^T = (\underline{F}^T \underline{F})^T = \underline{F}^T \underline{F} = \underline{C} \quad \text{und} \quad \bar{u} \circ \underline{C} \bar{u} > 0; \quad \bar{u} \neq \bar{0}, \quad \bar{u} \in \mathbb{R}^3$$

folgt:  $\underline{C}$  ist symmetrisch und positiv definit (LENZ [51]).

Damit lässt sich die Transformation eines materiellen Flächenelements zu

$$dA = J dA_0 \sqrt{\bar{n}_0 \circ \underline{C}^{-1} \bar{n}_0}$$

schreiben, wobei  $\bar{n}_0$  den Normaleneinheitsvektor des materiellen Flächenelements in der Bezugsplatzierung darstellt.

Die Transformation eines materiellen Linienelements in Richtung des Einheitsvektors  $\bar{a}$  ergibt sich zu

$$ds = dS \sqrt{\bar{a} \circ \underline{C} \bar{a}}$$

mit

$$d\bar{S} = |d\bar{\xi}|, \quad ds = |d\bar{x}|, \quad \bar{a} := \frac{d\bar{\xi}}{d\bar{S}} \Rightarrow |\bar{a}| = 1.$$

Für die Herleitung dieser Formeln sei auf ALTENBACH UND ALTENBACH [3], LENZ [51] oder BETTEN [10] verwiesen.

Die Komponenten des rechten Cauchy-Green Tensors lassen sich in Bezug auf ihre physikalischen Eigenschaften folgendermaßen interpretieren: Wird beispielsweise  $\bar{a} = \bar{e}_1$  gesetzt, so gilt

$$\frac{ds}{dS} = \sqrt{\bar{e}_1 \circ \underline{C} \bar{e}_1} = \sqrt{C_{11}}, \quad C_{11} = \left( \frac{ds}{dS} \right)^2.$$

Die Komponenten  $C_{11}, C_{22}, C_{33}$  von  $\underline{C}$  sind somit *Quadrate der Streckung* von Linienelementen, welche in der Bezugsplatzierung parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Die  $C_{ik}$  für  $i \neq k$  beschreiben dagegen im Wesentlichen Winkeländerungen von Linienelementen in der  $\bar{e}_i, \bar{e}_k$ -Ebene, welche in der Bezugsplatzierung orthogonal sind (LENZ [51]). Somit legt  $\underline{C}$  den Deformationszustand vollständig fest. Bei einer starren Abbildung reduziert sich der rechte Cauchy-Green Tensor auf den Einheitstensor.

Durch Hauptachsentransformation von  $\underline{C}$  erhält man die Hauptstreckungsquadrate (Eigenwerte) und die Hauptstreckungsrichtungen (Eigenvektoren).

Der Deformationsgradiententensor bezieht sich auf den gesamten Bewegungsvorgang eines materiellen Körpers, d.h. er enthält auch lokale Starrkörperbewegungen. Als Maß für Verzerrungen eines Körpers ist er somit ungeeignet. Die lokalen Starrkörperanteile müssen daher abgespalten werden oder es muss ein anderes Maß für die Verzerrungen definiert werden. Ein Zugang zu den Verzerrungen durch eine solche Abspaltung ist durch das *Polarzerlegungstheorem* gegeben. Danach lässt sich eine durch  $\underline{F}$  beschriebene Deformation lokal in eine Streckung  $\underline{U}$  mit anschließender Drehung  $\underline{R}$  zerlegen (ALTENBACH UND ALTENBACH [3]).

$$\underline{F} = \underline{R}\underline{U}.$$

Der rechte Streckungstensor  $\underline{U}$  ist im Hauptachsensystem von  $\underline{C}$  definiert und berechnet sich aus  $\underline{C}$  nach

$$\underline{U} := \sqrt{C_I} \bar{a}_I \otimes \bar{a}_I + \sqrt{C_{II}} \bar{a}_{II} \otimes \bar{a}_{II} + \sqrt{C_{III}} \bar{a}_{III} \otimes \bar{a}_{III}$$

mit

$$C_I, C_{II}, C_{III} = \text{Eigenwerte von } \underline{C} \text{ und } \bar{a}_I, \bar{a}_{II}, \bar{a}_{III} = \text{Eigenvektoren von } \underline{C}.$$

Die Deformationen lassen sich ebenso in eine starre Drehung mit anschließender Streckung zerlegen. Der Drehentensor  $\underline{R}$  ist dabei derselbe wie oben. Der in diesem Fall linke Streckungstensor  $\underline{V}$  wird aus dem *linken Cauchy-Green Tensor*  $\underline{B}$  mit

$$\underline{B} := \underline{F}\underline{F}^T \quad \text{nach} \quad \underline{B} = \underline{V}\underline{V}$$

berechnet (LENZ [51]).

Für viele Anwendungen aus der Kontinuumsmechanik ist es günstig, ein Verzerrungsmaß einzuführen, das für die Bezugsplatzierung und für die reine Starrkörperbewegung den Wert null und nicht den Wert eins annimmt. Letzteres ist bei den Tensoren  $\underline{U}$ ,  $\underline{V}$ ,  $\underline{C}$  und  $\underline{B}$  der Fall, die bei einer Starrkörperbewegung alle zum Einheitstensor werden. Es wird deswegen der *Greensche Verzerrungstensor*

$$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{C} - \underline{1})$$

eingeführt. Dieser Tensor ist symmetrisch und verschwindet bei einer starren Abbildung (ALTENBACH UND ALTENBACH [3]).

### 2.1.3 Infinitesimale Deformationen und Deformationsgradienten

Das Deformationsgradiententensorfeld  $\underline{F}$  und damit auch alle im vorhergehenden Abschnitt abgeleiteten Größen lassen sich auch mit Hilfe des Verschiebungsvektorfeldes und des *Verschiebungsgradiententensorfeldes* berechnen. Hierfür wird der *Nablaoperator* benötigt. Der Nablaoperator ist ein linearer, vektorähnlicher Differentialoperator, der für ein dreidimensionales, kartesisches Koordinatensystem nach

$$\nabla =: \bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \bar{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

definiert ist (LENZ [51]). Die Definition des Verschiebungsgradiententensorfeldes lässt sich damit zu

$$\text{Grad } \bar{u} = \nabla \otimes \bar{u} = \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_k \tag{2.1-4}$$

schreiben. Desweiteren wird das Kroneckersymbol

$$\delta_{ij} =: \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

verwendet.

Es gilt nun

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \bar{\xi} + \bar{u} \quad \Rightarrow \quad x_i = \xi_i + u_i \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} &= F_{ik} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} = \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}.\end{aligned}$$

Die  $\partial u_i / \partial \xi_k$  entsprechen aber genau den Komponenten von  $(\text{Grad } \bar{u})^T$ . Der Deformationsgradiententensor ergibt sich demnach zu

$$\underline{F} = \underline{1} + (\text{Grad } \bar{u})^T. \quad (2.1-5)$$

Ist also das Verschiebungsvektorfeld in Abhängigkeit von Ort und Zeit gegeben, so kann  $\underline{F}$  berechnet werden. Der Greensche Verzerrungstensor wird unter Verwendung obiger Formeln zu

$$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{C} - \underline{1}) = \frac{1}{2}(\underline{F}^T \underline{F} - \underline{1}) = \frac{1}{2}[(\underline{1} + \text{Grad } \bar{u})(\underline{1} + (\text{Grad } \bar{u})^T) - \underline{1}]. \quad (2.1-6)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Änderungen der Verschiebungen klein sind, lässt sich für die Berechnung von Verzerrungen eine Vereinfachung durchführen, die in ALTENBACH UND ALTENBACH [3] *geometrische Linearisierung der kinematischen Gleichungen* oder in LENZ [51] *lineare Theorie* genannt wird. Man kann die Gleichung 2.1-6 in

$$\underline{E} = \underbrace{\frac{1}{2}[\text{Grad } \bar{u} + (\text{Grad } \bar{u})^T]}_{\underline{\varepsilon}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\text{Grad } \bar{u})(\text{Grad } \bar{u})^T}_{\text{klein von 2. Ordnung in den Verschiebungsableitungen}} \quad (2.1-7)$$

umformen. Der zweite Summand aus Gleichung 2.1-7 kann bei kleinen Änderungen in den Verschiebungen vernachlässigt werden. Damit wird der ebenfalls symmetrische infinitesimale Deformationstensor  $\underline{\varepsilon}$  definiert:

$$\underline{\varepsilon} := \frac{1}{2}[\text{Grad } \bar{u} + (\text{Grad } \bar{u})^T] \quad , \quad \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^T.$$

Die Komponenten des infinitesimalen Deformationstensors lassen sich geometrisch deuten. Die Größen  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$  beschreiben *Dehnungen*, also relative Längenänderungen von infinitesimalen Strecken, die in der Bezugsplatzierung parallel zu den Koordinatenachsen lagen. Die Größen  $\varepsilon_{ik}$  für  $i \neq k$  beschreiben *halbe Winkeländerungen* von rechten Winkeln, die in der Bezugsplatzierung von Parallelen zur  $\bar{e}_i$ - und  $\bar{e}_k$ -Achse gebildet wurden (LENZ [51]). Der infinitesimale Deformationstensor beschreibt somit Längen- und Winkeländerungen (Abbildung 2.3).

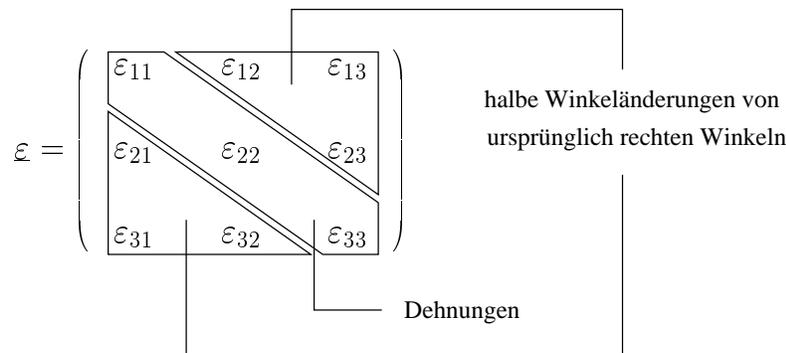


Abbildung 2.3: Bedeutung der Komponenten des Deformationstensors (LENZ [51])

Auf ähnliche Weise wie beim infinitesimalen Deformationstensor wird, basierend auf dem Drehtensor  $\underline{R}$ , mit Hilfe der geometrischen Linearisierung der kinematischen Gleichungen durch Vernachlässigung höherer Glieder der *infinitesimale Drehtensor*  $\underline{\Omega}$  definiert

$$\underline{\Omega} =: \frac{1}{2}[\text{Grad } \bar{u} - (\text{Grad } \bar{u})^T], \quad \underline{\Omega} = -\underline{\Omega}^T.$$

Der Drehtensor beschreibt die starre Drehung der infinitesimalen Umgebung eines Punktes. Im Allgemeinen ist  $\underline{\Omega}$  orts- und zeitabhängig ( $\underline{\Omega} = \underline{\Omega}(\bar{\xi}, t)$ ). Ist  $\underline{\Omega}$  ortsunabhängig ( $\underline{\Omega} = \underline{\Omega}(t)$ ), so ist der Drehtensor homogen und beschreibt eine globale Starrkörperdrehung des Kontinuums (LENZ [51]).

Diesem schiefssymmetrischen Tensor kann ein Drehvektor  $\bar{\omega}$  zugeordnet werden. Dieser Drehvektor, dessen Richtung die Drehachse und dessen Betrag den Drehwinkel angibt, ist folgendermaßen bestimmt:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{u} \quad \text{mit} \quad \text{rot } \bar{u} = \nabla \times \bar{u}.$$

Die Komponenten von  $\bar{\omega}$  ergeben sich somit zu

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial u_3 / \partial x_2 - \partial u_2 / \partial x_3 \\ \partial u_1 / \partial x_3 - \partial u_3 / \partial x_1 \\ \partial u_2 / \partial x_1 - \partial u_1 / \partial x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{23} \\ \Omega_{31} \\ \Omega_{12} \end{pmatrix}.$$

Sie entsprechen genau den infinitesimalen Drehungen um die Koordinatenachsen.

In der linearen Theorie wird die Dehnung  $\varepsilon_{(\bar{a})}(P)$  eines Linienelementes im Punkt P in Richtung des Einheitsvektors  $\bar{a}$  zu

$$\varepsilon_{(\bar{a})}(P) = \bar{a} \circ \underline{\varepsilon}(P) \bar{a}.$$

Die Volumendehnung (Dilatation) berechnet sich nach

$$e := \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \text{div } \bar{u} = \text{Spur}[\underline{\varepsilon}] \quad \text{mit} \quad \text{div } \bar{u} = \nabla \circ \bar{u}.$$

Bei  $e = 0$  ist die Deformation volumentreu oder isochor (LENZ [51]).

Durch eine Hauptachsentransformation von  $\underline{\varepsilon}$  erhält man die Hauptdehnungen (Eigenwerte) und Hauptdehnungsrichtungen (Eigenvektoren). Das Hauptachsensystem des Deformationstensors ist das Bezugssystem, in welchem nur Dehnungen und keine Winkeländerungen auftreten (LENZ [51]). Zu einem festen Zeitpunkt lassen sich mit einer solchen Hauptachsentransformation die sogenannten *Hauptdehnungstrajektorien* berechnen. Die Richtungen der Tangenten der Hauptdehnungstrajektorien entsprechen in jedem Punkt je einer Hauptdehnungsrichtung (LENZ [51]).

## 2.2 Zusammenfassung

Ist für ein Kontinuum ein Verschiebungsvektorfeld  $\bar{u} = \bar{u}(\bar{\xi}, t)$  gegeben, so ist es möglich, eine Vielzahl von Analysen der geometrischen Aspekte der Bewegung eines materiellen Körpers durchzuführen. Entscheidend ist hierbei, dass die Analysen nicht nur für einzelne, diskrete Objektpunkte durchgeführt werden und aus diesen auf globale Verformungen eines Körpers geschlossen wird, sondern auch Dehnungen und Rotationen der infinitesimalen Umgebung eines beliebigen Punktes des Körpers berechnet werden können. Ebenso können Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung jedes beliebigen Punktes des Körpers berechnet werden. Die aus dem Verschiebungsvektorfeld berechneten Tensoren können auf verschiedene Eigenschaften wie beispielsweise Orthogonalität und Homogenität und somit auf die Art der Bewegung getestet werden. Der Anteil einer starren Drehung an der gesamten Bewegung kann von Streckungen getrennt werden. Messungen, wie sie in der Geotechnik zur Erfassung relativer Lageänderungen von Punkten durchgeführt werden (Extensometer, Konvergenzmessungen, Inklinometer usw.), können in die Modelle integriert werden. Außerdem lässt sich das kinematische Modell durch die Erfassung physikalischer Größen wie Materialbeschaffenheiten und Temperatur in Richtung dynamischer Modelle erweitern. Das zentrale Problem, das es in dieser Arbeit zu lösen gilt, ist jedoch die Bestimmung des Verschiebungsvektorfeldes  $\bar{u}(\bar{\xi}, t)$  aus den an diskreten Punkten erhaltenen Messwerten. Eine Lösungsmöglichkeit wird im folgenden Kapitel vorgestellt.

### 3 Übergang von diskreten Objektpunkten zum Kontinuum

Das Kernproblem zur Anwendung der Theorien aus dem vorangegangenen Kapitel besteht im Übergang von diskreten Punkten zu einem kontinuierlichen materiellen Körper.

Da geodätische Messungen nur an diskreten Punkten durchgeführt werden können, ergeben sich Verschiebungsvektoren ebenfalls nur für diskrete Punkte zu bestimmten Zeitpunkten. Benötigt wird jedoch der Verschiebungsvektor  $\bar{u}$  in Abhängigkeit des Ortes  $\bar{\xi}$  und der Zeit  $t$ , also  $\bar{u}(\bar{\xi}, t)$ .

Dies führt zu zwei Interpolations- bzw. Approximationsproblemen, nämlich einerseits zur Interpolation bzw. Approximation einer Zeitfunktion für jeden einzelnen gemessenen Objektpunkt und andererseits zu einer Interpolation bzw. Approximation der Koeffizienten der Zeitfunktionen zwischen den einzelnen Objektpunkten. Der Unterschied zwischen Interpolation und Approximation besteht in der Forderung, dass die Interpolationsfunktion exakt durch die Stützpunkte läuft, dass ihre Werte also mit den gemessenen Werten an den Stützstellen übereinstimmen, wogegen bei der Approximation auf exakte Übereinstimmung der Approximationsfunktion mit den Stützpunkten verzichtet wird. Eine in der Regel einfachere Funktion wird so bestimmt, dass die Abweichungen der Approximationsfunktion von den gegebenen Stützpunkten minimiert werden. Im Folgenden wird, dem Sprachgebrauch in der Geodäsie folgend, nur noch der Begriff Interpolation verwendet, wenn auch in der Beispielrechnung in Kapitel 4 Approximationsverfahren zur Anwendung kommen. In diesem Kapitel werden Interpolationsverfahren, die zur Lösung der genannten Probleme in Frage kommen, vorgestellt und diskutiert.

#### 3.1 Basisfunktionen zur Interpolation

In diesem Abschnitt werden Monome und Bernsteinpolynome als Basisfunktionen für die Interpolation einer Funktion vorgestellt. Monome werden in der Beispielrechnung in Kapitel 4 verwendet, die Bernsteinpolynome erscheinen als sinnvolle Alternative. Weitere Möglichkeiten bestehen unter anderem in der Interpolation mit Lagrange-Polynomen und Newton-Polynomen. Auf diese Möglichkeiten soll jedoch nicht näher eingegangen werden. Detaillierte Beschreibungen finden sich beispielsweise in HOSCHEK UND LASSER [41].

##### 3.1.1 Monome als Basisfunktionen

Ein Polynom mit Monomen als Basisfunktionen lässt sich in folgender Form darstellen:

$$\bar{p}(t) = \sum_{j=0}^n \bar{d}_j t^j \quad (\bar{d} \in \mathbb{R}^2 \vee \mathbb{R}^3, \quad t \in [a, b]),$$

wobei das Polynom hier vektorwertig formuliert ist, mit den Koeffizienten  $\bar{d}_j$  aus  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  und dem Kurvenparameter  $t$  aus dem Intervall  $[a, b]$ . Existieren  $n + 1$  paarweise verschiedene Stützpunkte  $\bar{P}_i$  mit Parameterwerten  $t_i$ , so ergibt sich genau ein Polynom in obiger Form, für das  $\bar{p}(t_i) = \bar{P}_i$  gilt (HOSCHEK UND LASSER [41]).

Für die Interpolation einer Kurve des  $\mathbb{R}^2$  sind die Stützpunkte in der Regel als Zahlenpaar  $(x_i, f(x_i))$  gegeben mit den zugehörigen x-Koordinaten  $x_i$  als Stützstellen. Stehen mehr als  $n + 1$  Stützpunkte zur Verfügung (da der Polynomgrad in der Regel sinnvollerweise begrenzt wird), so ist das sich ergebende lineare Gleichungssystem überbestimmt und mit Hilfe der Ausgleichsrechnung (HÖPCKE [42] oder KOCH [47]) eindeutig zu lösen.

##### 3.1.2 Bernstein-Polynome als Basisfunktionen

Die Bernstein-Polynome sind die Basisfunktionen der Bézier-Kurven und der Bézier-Flächen (BÉZIER [16] und FORREST [32]). Die Bézier-Kurven wurden erstmals in DE CASTELJAU [23] und DE CASTELJAU [24] mit Hilfe des nach dem Autor benannten rekursiven *de Casteljau-Algorithmus* definiert. Bézier-Kurven können mit dem Algorithmus von de Casteljau rekursiv berechnet werden. Für analytische Zwecke und für theoretische Entwicklungen ist jedoch eine explizite Darstellung der Bézier-Kurven notwendig. Diese explizite Darstellung wird mit Hilfe der Bernstein-Polynome möglich (FARIN [29]).

Die Bernstein-Polynome können aus der binomischen Formel entwickelt werden:

$$1 = [(1 - t) + t]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 - t)^{n-k} t^k. \quad (3.1-1)$$

Die Summanden

$$B_k^n(t) := \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (3.1-2)$$

sind Polynome  $n$ -ten Grades und heißen *Bernstein-Polynome vom Grade  $n$*  (HOSCHEK UND LASSER [41]). Die Ableitungen der Bernstein-Polynome berechnen sich zu

$$\frac{d^p}{dt^p} B_i^n(t) = \frac{n!}{(n-p)!} \Delta^p B_i^n(t) \quad (3.1-3)$$

mit den Differenzen

$$\Delta^0 B_i^n(t) = B_i^n(t), \quad \Delta^p B_i^n(t) = \Delta^{p-1} [B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)].$$

Beschränkt man sich zunächst einmal auf das Intervall  $I = [0, 1]$  mit  $t \in I$ , so besitzen die Bernstein-Polynome folgende Eigenschaften:

$$B_k^n(0) = B_k^n(1) = 0 \quad (k \neq 0, \quad k \neq n),$$

$$B_0^n(0) = B_n^n(1) = 1, \quad B_0^n(1) = B_n^n(0) = 0,$$

$$B_k^n(t) \geq 0 \quad \text{für } t \in I, \quad \max_I B_k^n(t) = B_k^n\left(\frac{k}{n}\right),$$

$$B_k^n(t) = B_{n-k}^n(1-t), \quad \sum_{k=0}^n B_k^n(t) = 1.$$

Abbildung 3.1 zeigt die Graphen der Bernstein-Polynome 3. Grades  $B_i^3(t)$  über  $[0, 1]$ .

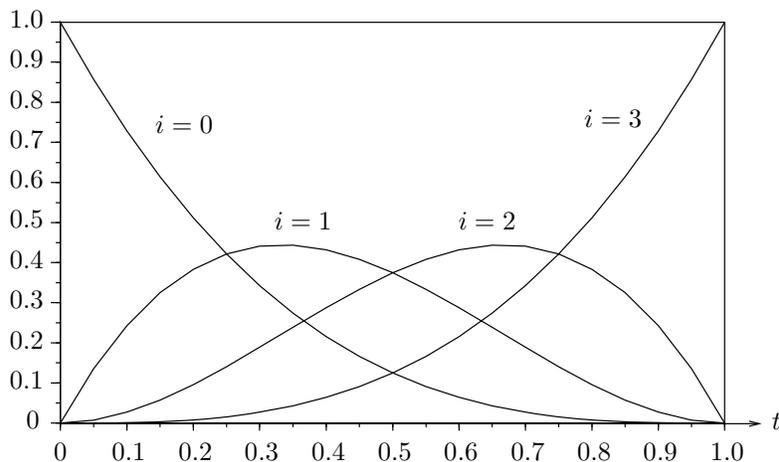


Abbildung 3.1: Bernstein-Polynome 3. Grades.

Mit diesen Bernstein-Funktionen als Basisfunktionen lässt sich nun eine Bézier-Kurve oder ein Bézier-Polynom vom Grad  $n$  in der Form

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=0}^n \bar{b}_i B_i^n(t) \quad (\bar{b}_i \in \mathbb{R}^1 \vee \mathbb{R}^2 \vee \mathbb{R}^3) \quad (3.1-4)$$

darstellen (HOSCHEK UND LASSER [41]).

Die konstanten Koeffizienten  $\bar{b}_i$  sind die sogenannten Bézier-Punkte. Sie können vektorwertig im  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  oder auch als reelle Zahlen des  $\mathbb{R}^1$  gewählt werden. Im letzteren Fall spricht man auch von Bézier-Ordinaten. Verwendet man solche Bézier-Ordinaten, so sind die Werte der Abszissen der Bézier-Punkte gleichmäßig auf das Parameterintervall verteilt. Bei einem Parameterintervall von  $I = [0, 1]$  ergeben sich die Abszissen der Bézierpunkte  $\bar{b}_i$  aus den Parameterwerten  $\frac{i}{n}$ . Der Streckenzug durch die Bézier-Punkte wird als Bézier-Polygon

bezeichnet (HOSCHEK UND LASSER [41]).

Im Gegensatz zu den Koeffizienten der Splinekurven mit Monomen als Basisfunktionen lassen sich die Koeffizienten der Bézier-Kurven geometrisch deuten (STÄRK [71]). Durch die  $\bar{b}_i$  wird der ungefähre Verlauf der Kurve (oder Fläche) festgelegt, wobei der erste und der letzte Bézier-Punkt Kurvenpunkte sind. Eine vorteilhafte Eigenschaft der Bézier-Kurven ist auch, dass die erste bzw. letzte Seite des Bézier-Polygons die Richtung der Tangente im ersten bzw. letzten Bézier-Punkt der Kurve festlegt. Diese Eigenschaft erweist sich bei der Formulierung von Bedingungen für den Übergang von einer Bézier-Kurve (oder Fläche) in die nächste als vorteilhaft.

Jedes Polynom-Kurvensegment der Form  $\bar{p}(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$  lässt sich auch als Bézier-Kurvensegment  $\bar{b}(t) = \sum_{i=0}^n \bar{b}_i B_i^n(t)$  darstellen (ABRAMOWSKI UND MÜLLER [1]). Die Ordinaten der  $\bar{b}_i$  ergeben sich hierfür aus den  $a_i$  nach

$$b_i = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{n}{k}^{-1} a_k. \quad (3.1-5)$$

Die Werte der Abszissen der Bézier-Punkte sind gleichmäßig auf das Parameterintervall verteilt.

Die Abbildung 3.2 zeigt ein 3D-Bézier-Polygon mit der daraus resultierenden Bézier-Kurve.

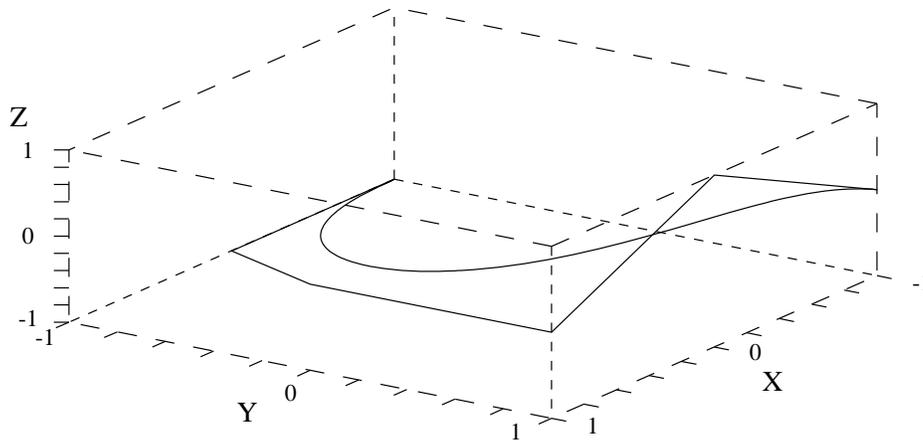


Abbildung 3.2: 3D-Polygon mit zugehöriger Bézier-Kurve.

### 3.1.3 Polynom-Kurven versus Bézier-Kurven

Um die Reaktionen von Polynom- und Bézier-Kurvensegmenten auf Änderung eines ihrer Koeffizienten miteinander vergleichen zu können, werden aus den Koeffizienten eines Polynomes 3. Grades  $a_0, a_1, a_2, a_3$  die entsprechenden Bézier-Ordinaten  $b_0, b_1, b_2, b_3$  nach Gleichung 3.1-5 berechnet. Sodann werden die Koeffizienten  $a_3$  und  $b_3$  leicht verändert. Die Zahlenwerte sowohl für die  $a_i$  als auch für die Änderungen für  $a_3$  und  $b_3$  wurden willkürlich gewählt. Die daraus resultierenden Kurven sind in Abbildung 3.3 dargestellt.

Als durchgehende Linie eingezeichnet ist die unveränderte Kurve in der Darstellung

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3,$$

bzw.

$$b(t) = p(t) = b_0 B_0^3(t) + b_1 B_1^3(t) + b_2 B_2^3(t) + b_3 B_3^3(t),$$

mit

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1.5, \quad a_2 = -0.1, \quad a_3 = 0.002$$

und nach Gleichung 3.1-5

$$b_0 = 2, \quad b_1 = 18, \quad b_2 = -0.133333, \quad b_3 = 13.136.$$

In diesem Beispiel gilt für den Parameter  $t = t \in [0, 32]$ . Repräsentiert der Kurvenparameter  $t$  die Zeit, so entspricht dieses Intervall einem Zeitraum von 32 Jahren. Das Intervall wurde so gewählt, weil die Daten, mit denen die Beispielrechnungen in Kapitel 4 durchgeführt werden, aus Messeperioden zwischen 1965 und 1997, also aus einem Zeitraum von 32 Jahren, stammen. Verändert man den Koeffizienten  $a_3$  nun um  $+0.0002$ , ändert sich der Verlauf des Polygonsegments entsprechend der gepunkteten Kurve. Wird dagegen der Bézier-Koeffizient  $b_3$  um  $+1.0$  geändert, ergibt sich der gestrichelt eingezeichnete Verlauf des Bézier-Kurvensegments.

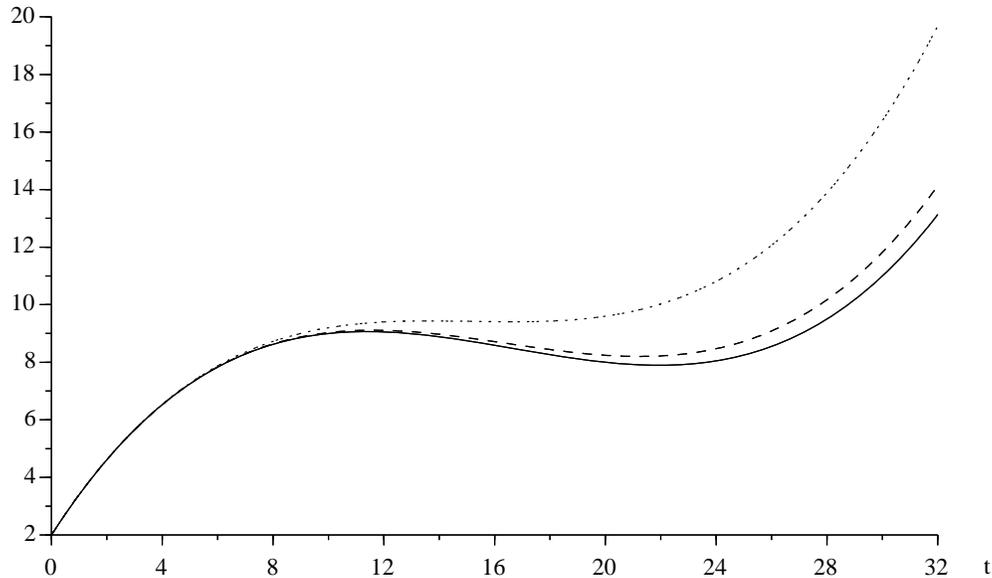


Abbildung 3.3: Verlauf von Bézier-Kurven und Polynomen bei Änderung eines Koeffizienten. Durchgehende Linie =  $p(t)$  bzw.  $b(t)$ , gestrichelt =  $b(t)$  mit  $b_3 + 1$ , gepunktet =  $p(t)$  mit  $a_3 + 0.0002$ .

Bei höherem Grad des Polynoms machen sich diese Effekte noch wesentlich stärker bemerkbar. Es ist hier deutlich zu sehen, dass die Aufbiegung am Kurvenende bei leichten Änderungen der Koeffizienten der Glieder höherer Ordnung bei Polynom-Kurven sehr stark, bei Bézier-Kurven dagegen sehr schwach ausgeprägt ist. Das Monom-Polynom  $p(t)$  reagiert auf kleine Änderungen eines Koeffizienten wesentlich sensibler als das Bézier-Polynom. Diese Tatsache ist vor allem für die flächenhafte Interpolation von großer Bedeutung. Dort stellen unrealistischen Aufbiegungen an den Rändern der interpolierenden Flächen in vielen Fällen ein Problem dar. Dies liegt in der Regel daran, dass die Flächen an den Rändern schwächer durch Datenpunkte repräsentiert werden als im Zentrum. Die Verwendung von Bézier-Flächen kann zur Lösung dieses Problems beitragen.

## 3.2 Interpolation der Zeitfunktionen

Durch die wiederholten Messungen zu diskreten Punkten eines sich deformierenden Objektes ergibt sich zu verschiedenen Zeitpunkten  $t$  je ein dreidimensionaler Vektor, welcher die Lage eines bestimmten Punktes im Raum zur Zeit  $t$  festlegt. Für jeden gemessenen Punkt des Objekts lässt sich eine Raumkurve mit der Zeit  $t$  als Kurvenparameter interpolieren. Da die Kurve die reale Bewegung der Objektpunkte modellieren soll, hängt ihre Art und Komplexität zunächst von der Art der Bewegung der Punkte ab. Die Anzahl der zu schätzenden Parameter nimmt mit der Komplexität zu. Die Anzahl der vorhandenen Messeperioden begrenzt jedoch die Anzahl der Parameter, die geschätzt werden können und beeinflusst so die Wahl der Interpolationsfunktionen.

### 3.2.1 Polynome

Stehen für einen einzelnen Objektpunkt dreidimensionale Koordinaten zu ausreichend vielen verschiedenen Zeitpunkten (Epochen) zur Verfügung, so lässt sich für jede einzelne Koordinate  $x_1, x_2, x_3$  ein ausgleichendes Polynom berechnen, welches den Verlauf der Koordinate in Abhängigkeit der Zeit  $t$  darstellt. Der Grad des Polynoms hängt von der Anzahl der gemessenen Epochen ab. Liegen nur zwei gemessene Epochen vor, so ist es

sinnvoll, ein Polynom 1. Grades, z. B.  $x_i = a_{0_i} + a_{1_i}t$ , als Bewegungsfunktion anzusetzen.

Je mehr Epochen zur Verfügung stehen, desto höher kann der Grad des Polynoms gewählt werden, doch ist es bei Polynomen mit Monomen als Basisfunktionen wenig sinnvoll, mit sehr hohem Polynomgrad zu arbeiten, da diese bekanntermaßen zu starker Welligkeit neigen (BONITZ [13]). Der Verlauf des Polynoms zwischen den Stützstellen wird relativ unberechenbar und entspricht in der Regel nicht der Realität. Bei der Verwendung von Bernstein-Polynomen als Basisfunktionen tritt das Problem der starken Welligkeit bei wachsendem Polynomgrad nicht auf.

Desweiteren ist bei der Interpolation mit Polynomen zu beachten, dass sie sich wegen ihrer Eigenschaft, mit stark wachsendem bzw. fallendem  $t$  ins Unendliche zu streben, für eine Extrapolation der Bewegung über die zuletzt gemessene Epoche hinaus oder auch auf Zeitpunkte, die vor der zuerst gemessenen Epoche (*Nullepoche*) liegen, in der Regel nicht zuverlässig verwenden lassen. Handelt es sich um Interpolation zwischen der ersten und der letzten Epoche, nicht aber um Voraussagen, so sind Polynome ein durchaus gangbarer Weg, um die Änderungen der Koordinaten eines Punktes in Abhängigkeit der Zeit darzustellen.

Ein Vorteil für die Berechnung der Koeffizienten des Polynoms mit Monomen als Basisfunktionen ist die Tatsache, dass sie sich durch eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate einfach und vor allem eindeutig berechnen lassen. Wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, ist diese Eindeutigkeit der Parameterbestimmung nicht bei allen Funktionen gewährleistet.

### 3.2.2 Trigonometrische Funktionen

Die Funktionen, mit denen die zeitlichen Änderungen der Koordinaten modelliert werden, sollten die Realität gut wie möglich beschreiben. Jahreszeitlich bedingte Schwankungen zum Beispiel können durch eine Sinusfunktion besser erfasst werden als durch ein Polynom. Dies gilt vor allem dann, wenn sich der Messzeitraum über mehrere Jahre erstreckt. In diesem Fall müsste ein sehr hoher Grad für ein Polynom gewählt werden, um den welligen Verlauf der Bewegung zu modellieren, was jedoch, wie bereits erwähnt, nicht zu empfehlen ist.

Voraussetzung für die Modellierung jahreszeitlich bedingter Schwankungen ist die Messung mehrerer Epochen pro Jahr. Da es hierbei um die Erfassung eines Signals geht, muss das Abtasttheorem (KRONMÜLLER [48]) beachtet werden. Um ein Signal repräsentativ zu erfassen, muss es mit mehr als der doppelten Frequenz des Signals, der sogenannten Nyquist-Frequenz (KAMMEYER UND KROSCHEL [44]), abgetastet werden. Dies gilt natürlich nicht nur für jahreszeitliche, sondern für alle periodischen Schwankungen in der Bewegung eines Punktes, was wiederum die Kenntnis voraussetzt, welche und wie viele periodische Schwankungen die Bewegung bewirken und beeinflussen. Andernfalls ergeben sich große Probleme bei der Interpretation der Ergebnisse der Parameterschätzung der Funktionen.

Bei der vermittelnden Ausgleichung nach dem funktionalen Modell  $\hat{l} = l + v = A\hat{x}$  ist die Zielfunktion  $v^T P v =$  Minimum. Bei der Schätzung der Koeffizienten einer Sinusfunktion hat  $v^T P v$  jedoch unendlich viele lokale Minima, d.h. es gibt unendlich viele Lösungen des Problems. Geht eine Sinusfunktion durch die Stützpunkte, mit denen ihre Koeffizienten ermittelt wurden, so geht jede andere Sinusfunktion mit einem ganzzahligen Vielfachen der Frequenz der ersten Sinusfunktion ebenfalls durch diese Stützpunkte. Um solche Aliasingeffekte zu vermeiden, muss die Schätzung der Frequenz der Funktion an zusätzliche Bedingungen geknüpft werden. Sie darf zum Beispiel die Hälfte der Abtastfrequenz nicht übersteigen (KRONMÜLLER [48]).

Eine andere Lösungsmöglichkeit besteht darin, die Frequenz der Sinusfunktion nicht aus den geodätischen Messungen, also aus den Änderungen der Koordinaten abzuleiten, sondern hierfür Messungen von Parametern zu verwenden, die zu den Ursachen der periodischen Schwankungen in direktem Bezug stehen. Derartige Parameter sind zum Beispiel Temperatur und Luftdruck. In vielen Fällen werden solche Messungen ohnehin über große Zeiträume und in kurzen Abständen durchgeführt und registriert, sodass eine zusätzliche Erfassung dieser Daten nicht notwendig ist. Anders verhält es sich mit Parametern wie dem Porenwasserdruck, dessen Messung zwar mit einigem Aufwand verbunden ist, an vielen Rutschhängen jedoch durchgeführt wird, ohne aber in der geodätischen Deformationsanalyse berücksichtigt zu werden. Eine derartige Schätzung der Frequenz der Sinusfunktionen bedeutet einen Schritt in Richtung integrierte dynamische Deformationsanalyse (Kapitel 6).

### 3.2.3 Kombination verschiedener Funktionen

Grundsätzlich ist es möglich, verschiedene Funktionen zu kombinieren. Es ist durchaus denkbar, dass eine lineare Änderung einer Koordinate durch eine Sinusfunktion überlagert wird:

$$x_i = a_{i_0} + a_{i_1} t + a_{i_2} \sin(a_{i_3} t + a_{i_4})$$

Die Verwendung verschiedener Zeitfunktionen für die einzelnen Koordinaten  $x_i$  kann durchaus sinnvoll sein. Es ist ohne weiteres vorstellbar, dass sich die  $x_1$ -Koordinate eines Punktes linear mit der Zeit ändert, während beispielsweise  $x_3$  einer Sinusfunktion folgt. Wenig sinnvoll ist es jedoch, verschiedene Zeitfunktionen für dieselbe Koordinate an verschiedenen Punkten anzusetzen. (z. B. ein Polynom 2. Grades für  $x_2$  des einen Punktes und eine Sinusfunktion für  $x_2$  eines benachbarten Punktes). Dies erschwert zum einen die flächenhafte Interpolation der Koeffizienten der Zeitfunktion, zum anderen scheint es auch wenig plausibel, dass sich die Koordinate des einen Punktes des Kontinuums nach einer anderen Funktion der Zeit ändert wie dieselbe Koordinate eines anderen Punktes.

## 3.3 Flächenhafte Interpolation der Koeffizienten der Zeitfunktion

Durch die Interpolation von Funktionen für die einzelnen Objektpunkte, welche den Verlauf der Koordinaten der Punkte ab einem Zeitpunkt  $t_0$  beschreiben, liegen nun Verschiebungsvektoren an diskreten Punkten in Abhängigkeit der Zeit  $t$  vor. Das heißt, es sind für jeden gemessenen Objektpunkt drei Funktionen gegeben.

$$x_i = F_i(t), \quad i = 1, 2, 3$$

Die Koeffizienten dieser Funktionen ändern sich im Allgemeinen von Punkt zu Punkt, sind also abhängig von den Koordinaten der Punkte. Die Interpolation, die hierfür durchgeführt werden muss, ist also streng genommen dreidimensional. Da es sich bei den in dieser Arbeit zu untersuchenden Objekten um Rutschhänge handelt, kann eine Vereinfachung durchgeführt werden. Die Abhängigkeit der Koeffizienten der Zeitfunktion von der 3. Komponente des Koordinatenvektors wird vernachlässigt, wodurch die Interpolation zweidimensional, also flächenhaft wird. Diese Vorgehensweise lässt sich folgendermaßen rechtfertigen: Durch geodätische Messungen können lediglich Punkte an der Oberfläche des Objekts erfasst werden. Vernachlässigt man nun die 3. Komponente des Koordinatenvektors bei der Interpolation, so erhält man den Verschiebungsvektor  $\bar{u}$  in Abhängigkeit der Zeit  $t$ ,  $x_1$  und  $x_2$ , also  $\bar{u} = \bar{u}(x_1, x_2, t)$ . Für  $t$ ,  $x_1$  und  $x_2 = const.$ , also entlang der Parallelen zur  $x_3$ -Achse, bleibt der Verschiebungsvektor  $\bar{u}(\bar{x}, t) = const.$  Wählt man das Koordinatensystem so, dass die  $x_3$ -Achse näherungsweise senkrecht zur Hangoberfläche steht, so bedeutet das, dass alle Punkte ober- und unterhalb (wenn man die  $x_3$ -Achse als Höhenachse interpretiert) eines Oberflächenpunktes gleiches Bewegungsverhalten aufweisen wie der Oberflächenpunkt selbst.

Punkte oberhalb der Oberfläche befinden sich außerhalb des Kontinuums. Um Aussagen über Bewegungen der Punkte unterhalb eines Oberflächenpunktes, also innerhalb der Rutschmasse selbst, treffen zu können, fehlen hier die erforderlichen Messungen und/oder Modellannahmen. Hier ergibt sich eine weitere Schnittstelle für eine mögliche Modellerweiterung (Kapitel 6). Die Deformationsmaße, die auf der Basis dieses Verschiebungsvektors  $\bar{u}(x_1, x_2, t)$  ermittelt werden, haben also nur für die Hangoberfläche Aussagekraft. Es sei noch erwähnt, dass bei Rutschhängen die Ausdehnung der konvexen Hülle um die zur Interpolation zur Verfügung stehenden Punkte in  $x_3$ -Richtung (bei einer Wahl des Koordinatensystems wie oben beschrieben) im Verhältnis zur Ausdehnung in  $x_1$ - bzw.  $x_2$ -Richtung in der Regel sehr gering ist. Der Beitrag der  $x_3$ -Komponente bei der Interpolation des Verschiebungsvektors ist somit ohnehin sehr gering.

Prinzipiell ist es allerdings möglich und für Anwendungen aus anderen Bereichen, z. B. der Industrievermessung, auch sinnvoll, dreidimensional zu interpolieren. Arbeiten, die sich mit höherdimensionaler Interpolation beschäftigen, finden sich bei FARWIG [30], FOLEY [31], ALFELD [2] und CASALE UND STANTON [17].

Die Ansätze für eine flächenhafte Interpolation sind sehr zahlreich. In dieser Arbeit sollen einige Möglichkeiten vorgestellt werden.

### 3.3.1 Bivariate Polynome

Ähnlich wie bei der Interpolation einer ausgleichenden Kurve in Abschnitt 3.2.1 können auch ausgleichende Flächen ermittelt werden. Die Stützstellen für die Interpolation sind die  $x_1$ - und die  $x_2$ -Koordinaten der Objektpunkte. Die Funktionswerte der Stützstellen sind die Koeffizienten der Zeitfunktionen, die für die einzelnen

Punkte zu ermitteln sind. Für jeden dieser Koeffizienten muss also eine ausgleichende Fläche berechnet werden. Ist beispielsweise die  $x_1$ -Koordinate der Punkte  $P_i$  gegeben durch die Funktion

$$x_{1_i} = a_{0_i} + a_{1_i}t + a_{2_i}t^2 + a_{3_i}t^3, \quad (3.3-1)$$

so ist für jeden Koeffizienten  $a_k$  mit  $k = 0, 1, 2, 3$  eine ausgleichende Fläche zu berechnen. Entsprechendes gilt für die Koeffizienten der Zeitfunktionen für  $x_2$  und  $x_3$ . Man erhält für jeden Koeffizienten eine Funktion

$$a_{k_l} = f(x_1, x_2) \quad \text{mit } l = 1, 2, 3.$$

Eine Lösungsmöglichkeit besteht in der Interpolation auf der Basis bivariater Polynome mit Monomen als Basisfunktionen (Abschnitt 3.1). Diese Polynome werden bei LANCASTER UND SALKAUSKAS [49] in Abhängigkeit ihrer Ordnung in Klassen eingeteilt:

Klasse	Basisfunktionen									
$\mathcal{K}_0$	1									
$\mathcal{K}_1$	1	$x$	$y$							
$\mathcal{K}_2$	1	$x$	$y$	$x^2$	$xy$	$y^2$				
$\mathcal{K}_3$	1	$x$	$y$	$x^2$	$xy$	$y^2$	$x^3$	$x^2y$	$xy^2$	$y^3$

Tabelle 3.1: Basisfunktionen für Polynome mit zwei Variablen.

Eine Funktion  $F(x, y)$  der Klasse  $\mathcal{K}_2$  hat also die Form

$$F(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2.$$

Allgemein ist  $\mathcal{K}_n$  die Klasse von Polynomen, die alle Funktionen der Form  $x^i y^j$ , mit  $0 \leq i+j \leq n$  und  $i \geq 0, j \geq 0$  enthält (LANCASTER UND SALKAUSKAS [49]).

Wie bei der Interpolation von Kurven lässt sich auch hier der Grad der ausgleichenden Fläche erhöhen. Es entstehen aber auch dieselben Probleme wie bei der Kurveninterpolation, nämlich die Neigung zu starker Welligkeit und die Anzahl der notwendigen Stützstellen, die mit dem Grad  $n$  der Fläche steigt, jedoch nicht linear, wie bei Kurven, sondern nach der Funktion  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ .

### 3.3.2 Bikubische Monomsplines

Der Interpolation mit bivariaten Polynomen aus dem vorhergehenden Abschnitt sehr ähnlich ist die Interpolation mit bikubischen Monomsplines (bikubische Flächen). Die Fläche ist hierbei gegeben durch

$$F(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j. \quad (3.3-2)$$

In AUMANN UND SPITZMÜLLER [4] wird eine solche Fläche *bikubische Fläche mit algebraischen Koeffizienten* genannt. Die Gleichung 3.3-2 lässt sich sehr einfach in Matrixform darstellen. Mit

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$$

lautet Gleichung 3.3-2 in Matrixschreibweise

$$F(x, y) = \bar{x}^T \bar{A} \bar{y}. \quad (3.3-3)$$

Auf dieselbe Art lässt sich auch die Interpolation mit Monomen nach LANCASTER UND SALKAUSKAS [49] darstellen. Die Matrix  $\bar{A}$  wird dann zu

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{20} & a_{21} & 0 & 0 \\ a_{30} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für weitere Überlegungen soll vorweg eine kurze Deutung der Koeffizienten der Zeitfunktion vorgenommen werden:

Bei einer Zeitfunktion nach Gleichung 3.3-1 ist der Koeffizient  $a_{0_i}$  als der Anfangswert der Koordinate  $x_i$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  zu interpretieren. Die Interpolation dieses Koeffizienten bedeutet nichts anderes, als die Interpolation der Hangoberfläche zur Zeit  $t = 0$ . Dies ist jedoch nicht das Hauptziel bei Deformationsmessungen. Die Vermarkung der Objektpunkte findet hierbei unter anderen Gesichtspunkten statt als bei einer topographischen Geländeaufnahme. Bei der Deformationsanalyse geht es um die Ermittlung von Deformationsmaßen, wie Bewegung, Geschwindigkeit, Dehnung und Gleitung und nicht um eine möglichst wirklichkeitsnahe Darstellung der Topographie des zu untersuchenden Objekts. Deswegen wird die interpolierende Fläche die tatsächliche Geländeform nicht realistisch darstellen. Eine Approximation der tatsächlichen Hangoberfläche durch eine einfache mathematische Fläche ist völlig ausreichend.

Der Koeffizient  $a_{1_i}$  stellt die lineare Komponente der Bewegung entlang einer Achsrichtung dar. In den meisten Fällen ist dies die dominante Komponente der Bewegung. Jedoch ist zu erwarten, dass diese Komponente z. B. in Richtung der Hangneigung mehrfach zu- und wieder abnimmt. Um diese „Wellen“ erfassen zu können, ist es erforderlich, Flächen höherer Ordnung zu verwenden. Wie bereits erwähnt, ist es jedoch nicht sinnvoll, den Grad der Fläche beliebig zu steigern. Wechseln sich Gebiete, die Dehnungen erfahren, häufiger mit Gebieten ab, in denen Stauchungen auftreten, so muss man bei der Interpolation mit Flächen niedriger Ordnung eine Generalisierung in Kauf nehmen. Das Ergebnis ermöglicht Aussagen über das globale Deformationsverhalten des Objektes. Kleinere Wellen werden durch die ausgleichende Fläche jedoch nicht erfasst, somit gehen lokale Einzelheiten unter.

### 3.4 Interpolation der Koeffizienten der Zeitfunktion durch Splineflächen

Für die Darstellung komplexer Flächen ist eine Interpolation mit Flächen  $n$ -ter Ordnung im Allgemeinen ungeeignet, da die Flächen höherer Ordnung zum Oszillieren neigen. Die Krümmung der Fläche soll sich jedoch nicht zu stark ändern. Als Alternative zur Interpolation mit einer durchgehenden Fläche bietet sich an, das Gebiet in kleine Teilgebiete zu segmentieren und damit die gesamte Fläche in Teilflächen zu zerlegen. Diese Teilflächen nennt man *Splineflächen*. In HOSCHEK UND LASSER [41] wird unterschieden zwischen

- Tensorprodukt-Flächen (viereckiges Parametergebiet),
- Flächen mit dreieckigem oder  $(2n+1)$ -eckigem Parametergebiet,
- Transfinite Methoden (Coons-Flächen),

und weiterhin wird von der Datenstruktur her unterschieden zwischen

- regelmäßig verteilten Daten und
- unregelmäßig verteilten Daten (scattered data).

Tensorprodukt-Flächen und Flächen mit dreieckigem Parametergebiet werden im Folgenden näher betrachtet. Flächen mit  $(2n+1)$ -eckigem Parametergebiet sowie transfinite Methoden, bei denen die Randkurven der Splineflächen vorgegeben sind, scheinen zur Lösung des hier gestellten Problems weniger geeignet.

Bei der Interpolation mit Hilfe von Teilflächen stellt sich natürlich das Problem einer sinnvollen Unterteilung der Gesamtfläche. Es muss gewährleistet sein, dass in jeder Teilfläche genügend Datenpunkte für eine Interpolation vorhanden sind. Weiterhin müssen Bedingungen an die Übergänge zwischen den Teilflächen geknüpft werden. Da zur Berechnung des Deformationsgradiententensorfeldes nach Gleichung 2.1-3 bzw. 2.1-5 das Verschiebungsvektorfeld  $\bar{u}(\bar{x}, t)$  nach den Koordinaten abzuleiten ist, müssen die 1. Ableitungen der Teilflächen entlang der gemeinsamen Kanten übereinstimmen. Ist dies der Fall, so spricht man von einem  $C^1$ - stetigen Anschluss der Teilflächen (HOSCHEK UND LASSER [41] und AUMANN UND SPITZMÜLLER [4]).

#### 3.4.1 Tensorprodukt-Flächen

Tensorprodukt-Flächen sind Flächen, die über einem rechteckigen Parametergebiet definiert sind. Sie können über verschiedene Basisfunktionen erzeugt werden. Die Bernstein-Polynome besitzen auch hier den Vorteil der

geometrischen Interpretierbarkeit ihrer Koeffizienten. Tensorprodukt-Flächen lassen sich über die entsprechenden Kurvendarstellungen gewinnen. Ausgegangen wird dabei von einer Kurve im Raum, die gegeben ist durch

$$\bar{b}(x) = \sum_{i=0}^n \bar{c}_i B_i(x)$$

mit  $B_i(x)$  als Basisfunktionen. Um eine Tensorprodukt-Fläche zu generieren, wird diese Kurve durch den Raum bewegt, wobei sie sich deformieren kann. Diese Deformation kann mit Hilfe eines zweiten Parameters  $y$  beschrieben werden durch

$$\bar{c}_i(y) = \sum_{k=0}^m \bar{a}_{ik} G_k(y).$$

Hieraus entsteht die Fläche

$$\bar{f}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m \bar{a}_{ik} B_i(x) G_k(y).$$

Werden als Basisfunktionen beispielsweise Monome verwendet, so ergibt sich die aus dem vorigen Kapitel bereits bekannte Flächendarstellung

$$\bar{f}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m \bar{a}_{ik} x^i y^k.$$

Setzt man hier für  $n = m = 3$ , erhält man bikubische Splineflächen als Teilflächen, die den oben erwähnten Übergangsbedingungen genügen müssen (HOSCHEK UND LASSER [41]). Im Folgenden sollen Tensorproduktflächen unter Verwendung der *Bernstein-Polynome* als Basisfunktionen etwas näher betrachtet werden.

Benutzt man zur Erzeugung von Tensorprodukt-Flächen die Bernstein-Polynome  $B_i^n(x)$ ,  $B_k^m(y)$ , so erhält man die Darstellung der Tensorprodukt-Bézier-Flächen vom Grad  $n, m$  in Abhängigkeit der Parameter  $x$  und  $y$

$$\bar{f}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m \bar{b}_{ik} B_i^n(x) B_k^m(y), \quad \text{mit } x, y \in [0, 1] \times [0, 1]. \quad (3.4-1)$$

Die Parameterlinien der Bézier-Flächen sind Bézier-Kurven (AUMANN UND SPITZMÜLLER [4]). Die Koeffizienten  $\bar{b}_{ik}$  sind die Bézier-Punkte, aus denen sich das Bézier-Netz zusammensetzt. Wie bei den Bézier-Kurven in Abschnitt 3.1.2, können die Koeffizienten auch hier vektor- oder funktionswertig gewählt werden. Die Punkte  $\bar{b}_{00}, \bar{b}_{n0}, \bar{b}_{0m}$  und  $\bar{b}_{nm}$  sind Eckpunkte der Bézier-Fläche. Die Tangentialflächen in den Eckpunkten der Bézier-Fläche werden durch den Eckpunkt selbst und die jeweiligen benachbarten Bézier-Punkte der Randkurven der Fläche festgelegt (HOSCHEK UND LASSER [41]).

Die Parameterlinien  $x = x_0 = \text{const.}$  bzw.  $y = y_0 = \text{const.}$  sind Bézier-Kurven mit den Bézier-Punkten

$$\bar{b}_k = \sum_{i=0}^n \bar{b}_{ik} B_i^n(x_0) \quad \text{bzw.}$$

$$\bar{b}_i = \sum_{k=0}^m \bar{b}_{ik} B_k^m(y_0).$$

Nach Gleichung 3.4-1 besitzen sie die Form

$$\bar{f}(x_0, y) = \sum_{k=0}^m \bar{b}_k B_k^m(y) \quad \text{bzw.}$$

$$\bar{f}(x, y_0) = \sum_{i=0}^n \bar{b}_i B_i^n(x).$$

Die Ableitungen ergeben sich nach HOSCHEK UND LASSER [41] entsprechend zu Abschnitt 3.1.2 zu

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r} \bar{f}(x, y) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \sum_{k=0}^m \Delta^{r0} \bar{b}_{ik} B_i^{n-r}(x) B_k^m(y) \quad \text{und} \quad (3.4-2)$$

$$\frac{\partial^s}{\partial y^s} \bar{f}(x, y) = \frac{m!}{(m-s)!} \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{m-s} \Delta^{0s} \bar{b}_{ik} B_i^n(x) B_k^{m-s}(y) \quad (3.4-3)$$

mit den Differenzen

$$\Delta^{r0} \bar{b}_{ik} = \Delta^{r-1,0} \bar{b}_{i+1,k} - \Delta^{r-1,0} \bar{b}_{ik} \quad \text{und} \quad \Delta^{0s} \bar{b}_{ik} = \Delta^{0,s-1} \bar{b}_{i,k+1} - \Delta^{0,s-1} \bar{b}_{ik}.$$

Die gemischten Ableitungen ergeben sich zu

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s} \bar{f}(x, y) = \frac{n!}{(n-r)!} \frac{m!}{(m-s)!} \sum_{i=0}^{n-r} \sum_{k=0}^{m-s} \Delta^{rs} \bar{b}_{ik} B_i^{n-r}(x) B_k^{m-s}(y)$$

mit  $\Delta^{rs} \bar{b}_{ik} = \sum_{j=0}^r \sum_{l=0}^s (-1)^j (-1)^l \binom{r}{j} \binom{s}{l} \bar{b}_{i+r-j, k+s-l}.$

Abbildung 3.4 zeigt ein Netz von  $5 \times 5$  Bézier-Punkten mit der zugehörigen Bézier-Fläche.

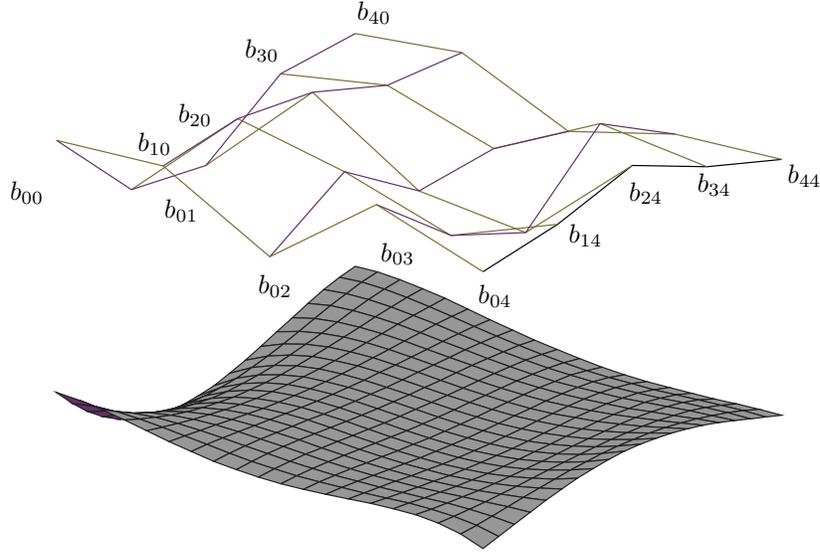


Abbildung 3.4: Bézier-Netz mit zugehöriger Bézier-Fläche vom Grad 4,4.

### 3.4.2 Anschlussbedingungen für Tensor-Produkt-Bézier-Flächen

Liegen zur Interpolation einer Gesamtfläche nun mehrere Bézier-Flächenstücke vor, die in einem Spline-Verband aneinandergesetzt werden sollen, so müssen für den Übergang von einem Flächenstück zum nächsten Übergangsbedingungen eingehalten werden. Die Flächenstücke müssen mindestens  $C^1$ -stetig aneinander angeschlossen werden (Abschnitt 3.4). Bei der Bezeichnung  $C^1$ -Stetigkeit kann noch unterschieden werden, ob die ersten Ableitungen längs und quer der gemeinsamen Randkurve übereinstimmen, oder ob die benachbarten Flächenstücke längs der gemeinsamen Randkurve gemeinsame Tangentialebenen besitzen. Letzteres ist bekannt als *geometrische  $C^1$ -Stetigkeit* oder kurz  *$GC^1$ -Stetigkeit* (HOSCHEK UND LASSER [41]). Im vorliegenden Fall muss allerdings  $C^1$ -Stetigkeit gefordert werden, da sonst Inhomogenitäten im Deformationstensor auftreten.

Bei mehreren rechteckigen Bézier-Flächenstücken gleichen Grades mit der Form

$$\bar{f}_{pq}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m \bar{b}_{ikpq} B_i^n(x) B_k^m(y), \quad (3.4-4)$$

ergibt sich die Situation nach Abbildung 3.5 für benachbarte Flächenstücke.

Sollen die Flächenstücke  $C^1$ -stetig aneinander anschließen, muss zunächst die Randkurve der beiden Flächenstücke übereinstimmen. Daher gilt:

$$\bar{b}_{nkpq} = \bar{b}_{0k,p+1,q} \quad \text{und} \quad \bar{b}_{impq} = \bar{b}_{i0p,q+1}. \quad (3.4-5)$$

Für die  $C^1$ -Stetigkeit entlang der Parameterlinie  $x_{p+1} = \text{const.}$  müssen die ersten Ableitungen der Flächenstücke (Gleichung 3.4-2) für  $x = x_{p+1}$  gleichgesetzt werden. Man erhält dadurch

$$\frac{\partial \bar{f}_{pq}}{\partial x}(x_{p+1}, y) = \frac{\partial \bar{f}_{p+1,q}}{\partial x}(x_{p+1}, y) \quad (3.4-6)$$

und entsprechend entlang der Parameterlinie  $y_{q+1} = \text{const.}$  (Gleichung 3.4-3)

$$\frac{\partial \bar{f}_{pq}}{\partial y}(x, y_{q+1}) = \frac{\partial \bar{f}_{p,q+1}}{\partial y}(x, y_{q+1}). \quad (3.4-7)$$

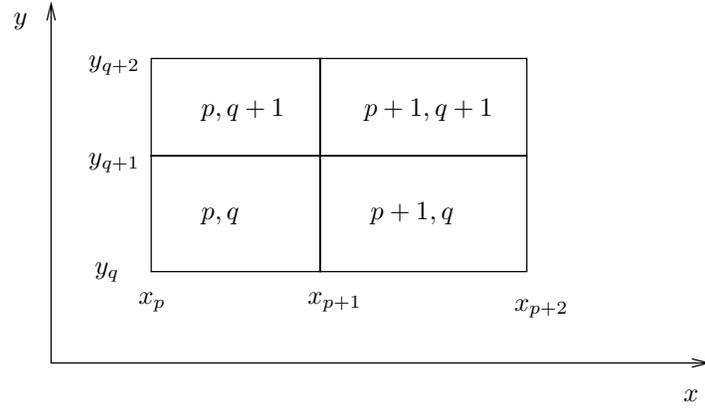


Abbildung 3.5: Bezeichnung benachbarter Bézier-Flächenstücke.

Setzt man die Gleichung 3.4-4 in die Gleichungen 3.4-6 und 3.4-7 ein, so ergibt sich längs  $x_{p+1} = const.$  (mit  $k = 0, 1, \dots, m$ )

$$\frac{n}{\Delta x_p} (\bar{b}_{nk} - \bar{b}_{n-1,k})_{pq} = \frac{n}{\Delta x_{p+1}} (\bar{b}_{1k} - \bar{b}_{0k})_{p+1,q} \quad (3.4-8)$$

oder längs  $y_{q+1} = const.$  mit  $(i = 0, 1, \dots, n)$

$$\frac{m}{\Delta y_q} (\bar{b}_{im} - \bar{b}_{i,m-1})_{pq} = \frac{m}{\Delta y_{q+1}} (\bar{b}_{i1} - \bar{b}_{i0})_{p,q+1} \quad (3.4-9)$$

mit  $\Delta x_p := x_{p+1} - x_p$  und  $\Delta y_q := y_{q+1} - y_q$ .

Zusammen mit Gleichung 3.4-5 folgen hieraus die  $C^1$ -Stetigkeitsbedingungen

$$\bar{b}_{nkpq} (\Delta x_{p+1} + \Delta x_p) = \Delta x_{p+1} \bar{b}_{n-1,kpq} + \Delta x_p \bar{b}_{1k,p+1,q}, \quad (3.4-10)$$

$$\bar{b}_{impq} (\Delta y_{q+1} + \Delta y_q) = \Delta y_{q+1} \bar{b}_{i,m-1,pq} + \Delta y_q \bar{b}_{i1,p,q+1}. \quad (3.4-11)$$

Diese Bedingungen lassen sich geometrisch folgendermaßen deuten: Die Bézier-Punkte in x-Richtung mit gleichem Index  $k$  liegen auf einer Geraden. Sie unterteilen die Verbindungsstrecke im Verhältnis der Längen der Parameterintervalle  $\Delta x_p : \Delta x_{p+1}$ . Entsprechendes gilt für die Bézier-Punkte in y-Richtung (HOSCHEK UND LASSER [41]).

Liegen  $(l + 1) \cdot (m + 1)$  Datenpunkte  $P_{pq}$  ( $p = 0, 1, \dots, l$  bzw.  $q = 0, 1, \dots, m$ ) vor, so lässt sich durch diese Punkte eine interpolierende bikubische Bézier-Splinefläche der Form

$$\bar{f}_{pq}(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^3 \bar{b}_{3p+i, 3q+k} B_i^3(x) B_k^3(y)$$

legen.

Fallen die Datenpunkte mit den Segmenteckpunkten zusammen, dann kann geschrieben werden

$$\bar{b}_{3p, 3q} = P_{pq}.$$

Die Interpolation der  $l + 1$  Zeilen und  $m + 1$  Spalten der gegebenen Punkte  $P_{pq}$  durch kubische Bézier-Splinekurven ergibt die Punkte

$$\bar{b}_{3p, 3q+j} \quad \text{und} \quad \bar{b}_{3p+j, 3q} \quad (j = 1, 2).$$

Für einen Eckpunkt  $\bar{b}_{3p, 3q}$  ergibt sich damit die in Abbildung 3.6 dargestellte Situation. Die mit einem Kreis markierten Punkte wurden festgelegt. Die noch freien Punkte, in Abbildung 3.6 mit einem Kreuz markiert, ergeben sich aus den Bedingungen für  $C^1$ -Stetigkeit entlang der gemeinsamen Randkurven der Flächenstücke

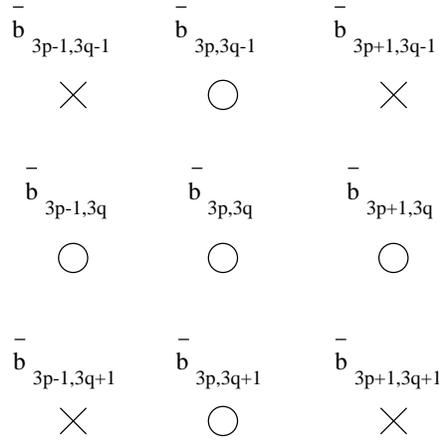


Abbildung 3.6: Situation an den Punkten vier aufeinandertreffender Flächenstücke des Splineverbandes (HOSCHEK UND LASSER [41]).

(HOSCHEK UND LASSER [41]).

Es muss nach den Gleichungen 3.4-10 und 3.4-11 gelten:

$$\Delta x_p \bar{b}_{3p+1,3q-1} + \Delta x_{p+1} \bar{b}_{3p-1,3q-1} = \bar{b}_{3p,3q-1}(\Delta x_p + \Delta x_{p+1}), \quad (3.4-12)$$

$$\Delta x_p \bar{b}_{3p+1,3q+1} + \Delta x_{p+1} \bar{b}_{3p-1,3q+1} = \bar{b}_{3p,3q+1}(\Delta x_p + \Delta x_{p+1}), \quad (3.4-13)$$

$$\Delta y_q \bar{b}_{3p-1,3q+1} + \Delta y_{q+1} \bar{b}_{3p-1,3q-1} = \bar{b}_{3p-1,3q}(\Delta y_q + \Delta y_{q+1}), \quad (3.4-14)$$

$$\Delta y_q \bar{b}_{3p+1,3q+1} + \Delta y_{q+1} \bar{b}_{3p+1,3q-1} = \bar{b}_{3p+1,3q}(\Delta y_q + \Delta y_{q+1}). \quad (3.4-15)$$

Voraussetzung ist jedoch, dass die Eckpunkte der Bézier-Flächen zugleich die zu interpolierenden Datenpunkte sind, was in der Praxis jedoch selten zutrifft. In den meisten Fällen liegt eine unregelmäßige Verteilung der Datenpunkte vor (*scattered data*). Abhandlungen zur Interpolation unregelmäßig verteilter Daten finden sich bei FRANKE [33], FRANKE [34], FARWIG [30], SCHUMAKER [66], SCHMIDT [60], SCHMIDT [61] sowie SCHMIDT [62].

Zur Interpolation unregelmäßig verteilter Daten können alle Bézier-Punkte als Unbekannte in eine Ausgleichung eingeführt werden. Die Datenpunkte gehen dabei als Beobachtungen ein. Die  $C^1$ -Stetigkeit wird durch die Formulierung von Bedingungen zwischen den Unbekannten nach den Gleichungen 3.4-12 bis 3.4-15 realisiert. Näherungswerte für die unbekanntenen Bézier-Punkte können beispielsweise aus der Interpolation einer einfachen Fläche, wie in Abschnitt 3.3.1 beschrieben, erhalten werden. Es muss aber auf alle Fälle gewährleistet sein, dass in jeder Teilfläche  $\bar{f}_{pq}$  genügend Datenpunkte zur Bestimmung der Unbekannten zu liegen kommen. Bei stark unregelmäßig verteilten Daten kann dies zu Problemen führen, da die Kantenlängen benachbarter Flächenstücke übereinstimmen müssen.

### 3.4.3 Dreiecks-Bézier-Flächen

Eine Aufteilung der gesamten Fläche in Dreiecke bringt wesentlich mehr Flexibilität mit sich als die Aufteilung in Rechtecke. Es besteht auch die Möglichkeit, eine Triangulierung über alle Datenpunkte zu rechnen und die daraus resultierenden Dreiecke als Dreiecks-Bézier-Flächen für die Interpolation zu verwenden. In diesem Lösungsansatz fehlt jedoch die Überbestimmung und somit die Möglichkeit, Aussagen über Genauigkeit und Zuverlässigkeit zu treffen. Eine bessere Aufteilung des gesamten Gebietes in Dreiecks-Flächen ergibt sich durch die Festlegung von  $x$ - und  $y$ -Werten für die Eckpunkte der Dreiecke, die nicht den Werten der Datenpunkte entsprechen. Wie bei der Aufteilung der gesamten Fläche in Rechtecke muss auch hier darauf geachtet werden, dass genügend Datenpunkte für die Schätzung der Unbekannten innerhalb jedes Dreiecks zur Verfügung stehen. Näherungswerte für die unbekanntenen  $z$ -Werte der Eckpunkte der Dreiecke können aus der Interpolation einer einfachen Fläche, wie in Abschnitt 3.3.1 beschrieben, berechnet werden. Die Bézier-Punkte, welche die Fläche festlegen, werden als Unbekannte in die Ausgleichung eingeführt und die Beobachtungen sind wiederum die

Datenpunkte.

Für eine Triangulierung gibt es unendlich viele Möglichkeiten. Ein nicht zu unterschätzendes Problem ergibt sich dann, wenn diese Triangulierung automatisch und in Abhängigkeit der Verteilung der Datenpunkte berechnet werden soll. Die häufig verwendete Delauney-Triangulierung beispielsweise berechnet Dreiecke mit den Datenpunkten als Eckpunkte. Dies jedoch soll vermieden werden oder es sollen zumindest nicht alle Datenpunkte Dreieckspunkte sein. Werden aber nicht alle Datenpunkte für die Delauney-Triangulierung verwendet, stellt sich die Frage, über welche Punkte trianguliert werden soll. Wählt man Dreieckspunkte zunächst willkürlich aus, so ist man freier in der Gestaltung der Form der Dreiecke. Doch sind auch hier gewisse Kriterien zu berücksichtigen. Vorrangig ist sicherlich die Anzahl der Datenpunkte, die sich in jedem Dreieck befinden. Desweiteren sollen die Dreiecke gewisse Formkriterien erfüllen. Sehr flache Dreiecke sind ungünstig für eine Interpolation. Zu untersuchen wäre auch, ob die Größenverhältnisse der Dreiecke ein weiteres Kriterium für die Triangulierung darstellen soll. Untersuchungen zum Problem der Triangulierung finden sich beispielsweise in AUMANN UND SPITZMÜLLER [4], SCHUMAKER [67] und NIELSON UND FRANKE [53].

Durch die Aufteilung in Dreiecke anstatt in Rechtecke ergibt sich außerdem noch ein wesentlicher Vorteil für die Anwendung in der Kontinuumsmechanik. Bei der Interpolation einer  $C^1$ -stetigen Fläche für alle Parameter der Zeitfunktion über das gesamte zu untersuchende Gebiet wird implizit von einem einzigen Kontinuum ausgegangen. Unstetigkeiten oder Bruchkanten können hier nicht modelliert werden. In der Realität sind jedoch solche Bruchkanten, an denen das Kontinuum unterbrochen ist, keine Seltenheit und in vielen Fällen auch anhand geologischer oder geomorphologischer Merkmale des Geländes erkennbar. Bei der Auswahl und Vermarkung von Objektpunkten an Rutschhängen wird auf diese Geländemerkmale geachtet, speziell um das Bewegungsverhalten an diesen Diskontinuitätsgrenzen aufzudecken.

Sollen die Bruchkanten bei der Berechnung von Deformationsmaßen berücksichtigt werden, so muss das gesamte zu untersuchende Gebiet in einzelne Teilgebiete zerlegt werden. Die Grenzen der Teilgebiete sind logischerweise die Bruchkanten, an denen die einzelnen Kontinua aneinander stoßen. Bei der Interpolation unter Verwendung von Teilflächen mit rechteckigem Parametergebiet wird schnell klar, dass die Bruchkanten nur dann modelliert werden können, wenn sie gerade und zueinander rechtwinklig oder parallel verlaufen. Bei der Unterteilung in Dreiecke hingegen können die Dreiecksseiten entlang beliebiger Bruchkanten verlaufen, zumal dort in den meisten Fällen genügend Datenpunkte vorhanden sind. Die gesamte Fläche kann somit besser in unregelmäßig geformte Teilflächen unterteilt werden. Ein relatives Bewegungs- und Deformationsverhalten zweier aneinander angrenzender Kontinua ist also wesentlich einfacher zu modellieren.

Ein Rechteck kann in ein Dreieck überführt werden, indem man entweder

- eine Rechtecksseite zu einem Punkt zusammenschrumpfen lässt oder
- zwei Rechtecksseiten entlang einer Geraden anordnet.

Diese „entarteten“ Rechtecke sind jedoch nicht unproblematisch. Wird eine Rechtecksseite zu einem Punkt, fallen alle Bézier-Punkte dieser Seite in einem Punkt zusammen. Das hat zur Folge, dass die Dreiecksfläche in diesem Punkt nicht differenzierbar ist. Im zweiten Fall ist die Tangentialebene im mittleren, auf der Geraden liegenden Bézier-Punkt nicht definiert, da dort die beiden Tangentenrichtungen der Randkurven antiparallel sind (HOSCHEK UND LASSER [41]). Diese Tatsache hat zur Folge, dass die Verwendung solcher entarteter Rechtecke für die Interpolation zur Realisierung eines Kontinuums ausscheidet, da die Differenzierbarkeit der interpolierenden Flächen in allen Punkten gegeben sein muss. Um diese Probleme zu umgehen, werden nun Flächen mit regulärem, dreieckigem Parametergebiet konstruiert. Hierzu werden baryzentrische Koordinaten und verallgemeinerte Bernstein-Polynome benötigt.

**Baryzentrische Koordinaten** Mit Hilfe von baryzentrischen Koordinaten lassen sich Punkte innerhalb eines Dreiecks festlegen.

Wird zunächst die Strecke  $I = [0, 1]$  betrachtet, so lässt sich jeder Punkt von  $I$  durch die Koordinaten  $(u, v)$  mit

$$u = t, \quad v = 1 - t \quad (t \in I) \quad \text{und der Nebenbedingung} \quad u + v = 1$$

beschreiben. Die Koordinaten  $(u, v)$  nennt man *baryzentrische Koordinaten* mit der Nebenbedingung  $u + v = 1$  (HOSCHEK UND LASSER [41]). Die Bernstein-Polynome in diesen Koordinaten lauten:

$$B_i^n(t) =: B_{ij}^n(u, v) = \frac{n!}{i!j!} u^i v^j \quad \text{mit}$$

$$i + j = n, \quad i, j \geq 0, \quad u + v = 1, \quad u, v \geq 0.$$

Die  $B_{ij}^n(u, v)$  können dabei als Summanden von  $(u + v)^n = 1$  gedeutet werden. Überträgt man dieses Prinzip auf Dreiecke des  $\mathbb{R}^2$ , so kann jeder Punkt innerhalb des Dreiecks mit den Ecken  $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$  durch die baryzentrischen Koordinaten

$$(u, v, w) \quad \text{mit der Nebenbedingung} \quad u + v + w = 1 \quad \text{und} \quad u, v, w \geq 0$$

festgelegt werden:

$$\bar{p} = u\bar{U} + v\bar{V} + w\bar{W}.$$

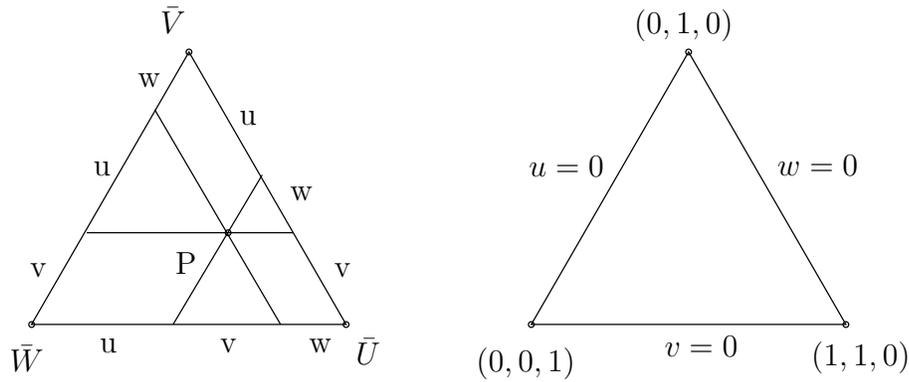


Abbildung 3.7: Baryzentrische Koordinaten.

Wie aus Abbildung 3.7 ersichtlich ist, hat der Eckpunkt  $\bar{V}$  die Koordinaten  $(0, 1, 0)$ . Die Seiten der Dreiecke ergeben sich zu  $w = 0$  für die Seite  $\bar{U}\bar{V}$ ,  $v = 0$  für die Seite  $\bar{U}\bar{W}$  und entsprechend  $u = 0$  für die Seite  $\bar{V}\bar{W}$ . Ein beliebiger Punkt ergibt sich aus der proportionalen Parallelverschiebung der Dreiecksseiten. Das Dreieck  $\bar{U}\bar{V}\bar{W}$  wird als *Grunddreieck des baryzentrischen Koordinatensystems* bezeichnet (HOSCHEK UND LASSER [41]).

**Verallgemeinerte Bernstein-Polynome** Die Bernstein-Polynome über einem Grunddreieck, wie in Abschnitt 3.4.3 beschrieben, lassen sich mit Hilfe der baryzentrischen Koordinaten wie folgt definieren:

Ausgegangen wird von der Identität

$$(u + v + w)^n = \sum_{\substack{i, j, k \geq 0 \\ i + j + k = n}} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k,$$

wobei die Beziehungen

$$(u + [v + w])^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^i (v + w)^{n-i},$$

$$(v + w)^{n-i} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-i}{j} v^j w^{n-i-j}$$

sowie

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

gültig sind. Aus diesen Gleichungen folgen die verallgemeinerten Bernstein-Polynome vom Grad  $n$ :

$$B_{ijk}^n(u, v, w) := \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \quad (3.4-16)$$

mit  $i + j + k = n$ ,  $i, j, k \geq 0$ ,  $u + v + w = 1$ ,  $u, v, w \geq 0$ .

Wegen  $u + v + w = 1$  gilt die Normierungsbedingung

$$\sum_{i+j+k=n} B_{ijk}^n(u, v, w) = 1,$$

wobei über alle möglichen Kombinationen von  $(i, j, k)$ , welche die Bedingungen  $i + j + k = n$  und  $i, j, k \geq 0$  erfüllen, zu summieren ist. Dabei ergeben sich insgesamt  $\binom{n+2}{2} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$  Summanden (HOSCHEK UND LASSER [41], FARIN [29] sowie AUMANN UND SPITZMÜLLER [4]). Auf den Dreiecksrändern entsprechen die verallgemeinerten Bernstein-Polynome gewöhnlichen Bernstein-Polynomen, da beispielsweise

$$B_{0jk}^n(0, v, w) = \frac{n!}{j!k!} v^j w^k$$

gilt, woraus mit

$$w = (1 - v) \quad \text{und} \quad k = (n - j)$$

$$\begin{aligned} B_{0jk}^n(0, v, w) &= \frac{n!}{j!(n-j)!} v^j (1-v)^{n-j} \\ &= \binom{n}{j} (1-v)^{n-j} v^j = B_j^n(v) = B_k^n(w) \end{aligned}$$

folgt (HOSCHEK UND LASSER [41]).

Sollen die verallgemeinerten Bernstein-Polynome in ähnlicher Form wie in Abbildung 3.1 graphisch veranschaulicht werden, so hat man sich ein Flächenstück über einem Grunddreieck mit dem Maximum bei  $u, v, w = \frac{1}{n}(i, j, k)$  gemäß Abbildung 3.8 vorzustellen. Für  $B_{012}^3$  liegt das Maximum bei  $(u, v, w) = \frac{1}{3}(0, 1, 2)$ , also bei  $u = 0$ ,  $v = \frac{1}{3}$  und  $w = \frac{2}{3}$ .

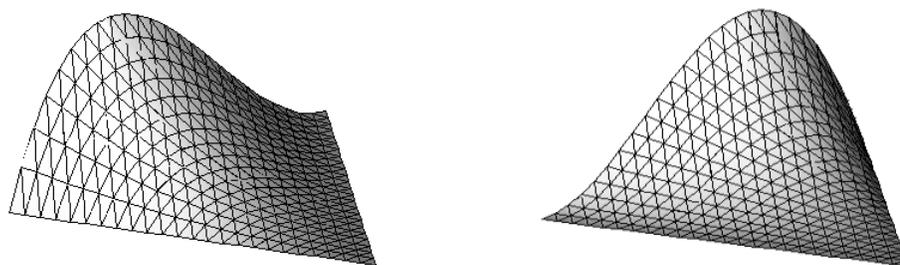


Abbildung 3.8: Basisfunktionen  $B_{012}^3$  und  $B_{021}^3$  (aus BANGERT ET AL [5]).

Die verallgemeinerten Bernstein-Polynome bilden aufgrund ihrer linearen Unabhängigkeit eine Basis eines Unterraumes des Vektorraumes der Polynome vom Grad  $(n, n)$ . Die Dimension dieses Unterraumes ist  $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ . Jedes Element  $\bar{f}$  des von den  $B_{ijk}^n$  aufgespannten linearen Raumes hat nach HOSCHEK UND LASSER [41] die eindeutige Darstellung

$$\bar{f}(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} \bar{b}_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w). \quad (3.4-17)$$

$\bar{f}(u, v, w)$  ist die Parameterdarstellung einer Dreiecks-Bézier-Fläche vom Grad  $n$ . Die Bézier-Punkte  $\bar{b}_{ijk}$  legen die Form der Fläche fest. Wie auch bei Tensor-Produkt-Bézier-Flächen und Bézier-Kurven können für die

Bézier-Punkte wieder reelle Zahlen gewählt werden, wodurch sich eine funktionswertige Definition der Dreiecks-Bézier-Fläche ergibt. Diese Punkte bilden, wie bei den Tensorprodukt-Bézier-Flächen in Abschnitt 3.4.1 das sogenannte Bézier-Netz oder Bézier-Polyeder (FARIN [28]). Die Bézier-Punkte  $\bar{b}_{00n}$ ,  $\bar{b}_{0n0}$  und  $\bar{b}_{n00}$  sind die Eckpunkte des Bézier-Dreiecks und gleichzeitig Flächenpunkte. Die auf den Rändern des Bézier-Dreiecks liegenden Nachbarpunkte der Eckpunkte legen die Richtung der Tangenten der Randkurven fest. Die Tangentialebene im Eckpunkt des Bézier-Dreiecks wird durch den Eckpunkt und seine beiden benachbarten Bézier-Punkte der Randkurven festgelegt (HOSCHEK UND LASSER [41]). Damit wird erkennbar, dass auch bei Dreiecks-Bézier-Flächen die Übergangsbedingungen von einer Dreiecks-Fläche in die nächste geometrisch interpretierbar sind.

### 3.4.4 Anschlussbedingungen für Dreiecks-Bézier-Flächen

Aufgrund der auch hier geltenden Forderung der  $C^1$ -Stetigkeit für die gesamte interpolierende Fläche müssen Bedingungen für die Übergänge von einer Dreiecks-Bézier-Fläche auf die nächste eingehalten werden. Bei den Tensor-Produkt-Bézier-Flächen war dies durch den Vergleich der partiellen Ableitungen entlang der Randkurven der aneinander angrenzenden Flächenstücke möglich. Wegen der Nebenbedingung  $u + v + w = 1$  mit  $0 \leq u, v, w \leq 1$  sind die Parameter der Dreiecks-Bézier-Flächen voneinander abhängig. Um hier die Ableitungen längs der Parameterlinien zu erhalten, muss die Nebenbedingung  $w = 1 - u - v$  in die abzuleitende Funktion eingesetzt werden. Damit verschwinden die Parameterlinien  $w = \text{const.}$  und es treten nur noch die partiellen Ableitungen nach  $u$  und  $v$  auf. Es kann aber auch  $v = 1 - u - w$  in die abzuleitende Funktion eingesetzt werden. Dadurch würden dann die Parameterlinien  $v = \text{const.}$  verschwinden.

Für die Formulierung von Anschlussbedingungen werden die Ableitungen der Dreiecks-Flächen längs der Parameterlinien benötigt. Die 1. Ableitung ergibt sich nach HOSCHEK UND LASSER [41] zu

$$\frac{D\bar{f}}{du} = n \sum_{i+j+k=n-1} (\bar{b}_{i+1,j,k} - \bar{b}_{i,j,k+1}) B_{i,j,k}^{n-1}(u, v, w). \quad (3.4-18)$$

Hierbei wurde  $w = 1 - u - v$  eingeführt. Durch Setzen von  $v = 1 - u - w$  ergibt sich die 1. Ableitung zu

$$\frac{D\bar{f}}{du} = n \sum_{i+j+k=n-1} (\bar{b}_{i+1,j,k} - \bar{b}_{i,j+1,k}) B_{i,j,k}^{n-1}(u, v, w). \quad (3.4-19)$$

Ebenso erhält man

$$\frac{D\bar{f}}{dv} = n \sum_{i+j+k=n-1} (\bar{b}_{i,j+1,k} - \bar{b}_{i,j,k+1}) B_{i,j,k}^{n-1}(u, v, w) \quad (3.4-20)$$

mit  $w = 1 - u - v$  und

$$\frac{D\bar{f}}{dw} = n \sum_{i+j+k=n-1} (\bar{b}_{i,j,k+1} - \bar{b}_{i+1,j,k}) B_{i,j,k}^{n-1}(u, v, w) \quad (3.4-21)$$

mit  $u = 1 - v - w$ .

Abbildung 3.9 zeigt eine geometrische Interpretation der obigen Ableitungen. Die durchgehenden Linien entsprechen den Ableitungen nach Gleichung 3.4-18, die gestrichelten Linien den Ableitungen nach 3.4-19 und die strichpunktierten den Ableitungen nach 3.4-20.

Die Aussage in Abschnitt 3.4.3, wonach die Eckpunkte und die beiden benachbarten Bézier-Punkte auf den Randkurven die Tangentialebenen in den Eckpunkten der Dreiecks-Bézier-Fläche festlegen, lässt sich nun auch durch Formeln belegen. Werden die baryzentrischen Koordinaten der Eckpunkte in die obigen Formeln eingesetzt, ergibt sich

$$\frac{D\bar{f}}{du}(0, 0, 1) = n(\bar{b}_{1,0,n-1} - \bar{b}_{00n})$$

sowie

$$\frac{D\bar{f}}{dv}(0, 0, 1) = n(\bar{b}_{0,1,n-1} - \bar{b}_{00n}).$$

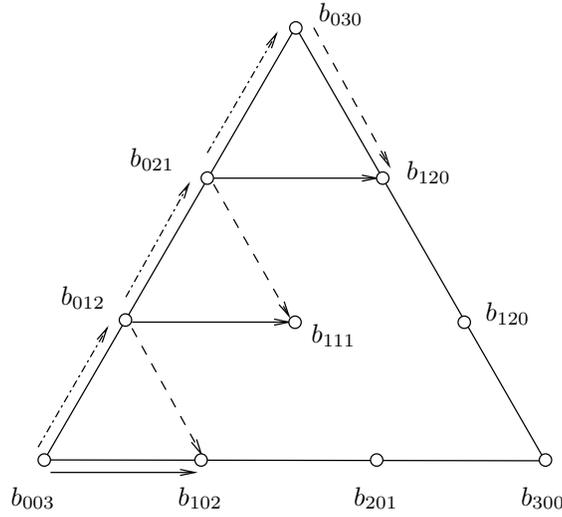


Abbildung 3.9: Geometrische Deutung der Ableitungen nach  $u$  und  $v$  (HOSCHEK UND LASSER [41]).

Somit wird die Tangentialebene im Eckpunkt  $(u, v, w) = (0, 0, 1)$  vom Eckpunkt selbst und seinen beiden benachbarten Punkten auf den Randkurven festgelegt (HOSCHEK UND LASSER [41]). Entsprechendes ergibt sich für die Eckpunkte  $(u, v, w) = (0, 1, 0)$  bzw.  $(u, v, w) = (1, 0, 0)$ .

Für einen  $C^1$ -stetigen Anschluss einer Dreiecks-Fläche an die andere müssen die beiden Flächen zunächst  $C^0$ -stetig ineinander übergehen. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn die Bézier-Punkte entlang der gemeinsamen Randkurve identisch sind. Werden die beiden Flächen mit

$$\bar{f}_1(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} \bar{b}_{ijk}^1 B_{ijk}^n(u, v, w)$$

und

$$\bar{f}_2(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} \bar{b}_{ijk}^2 B_{ijk}^n(u, v, w)$$

angesetzt, so gilt bei  $C^0$ -Stetigkeit entlang der gemeinsamen Randkurve  $u = 0$

$$\bar{f}_1(0, v, w) = \bar{f}_2(0, v, w)$$

und damit

$$\bar{b}_{0,n-k,k}^1 = \bar{b}_{0,n-k,k}^2 \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.4-22)$$

Wie bei den Tensor-Produkt-Bézier-Flächen aus Abschnitt 3.4.2 existiert auch hier der Begriff der geometrischen  $C^1$ -Stetigkeit. Hierbei stimmen die Tangentialebenen entlang der gemeinsamen Randkurve überein, jedoch nicht notwendigerweise die 1. Ableitungen (HOSCHEK UND LASSER [41]). Fordert man zunächst nur  $GC^1$ -Stetigkeit, so führt dies zu

$$\frac{D\bar{f}_1}{du}(0, v, w) = \lambda_1 \frac{D\bar{f}_2}{du}(0, v, w) + \lambda_2 \frac{D\bar{f}_2}{dw}(0, v, w).$$

Die Faktoren  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind hierbei sogenannte *Designparameter*. Sie sind frei wählbar. Setzt man nun die Ableitungen nach Gleichung 3.4-18 bis 3.4-21 in die obige Gleichung ein und vergleicht die Koeffizienten, so erhält man

$$(\bar{b}_{1,n-1-k,k}^1 - \bar{b}_{0,n-1-k,k+1}^1) = \lambda_1(\bar{b}_{1,n-1-k,k}^2 - \bar{b}_{0,n-1-k,k+1}^2) + \lambda_2(\bar{b}_{0,n-1-k,k+1}^2 - \bar{b}_{0,n-k,k}^2).$$

Mit  $\lambda = 1 - \lambda_1 + \lambda_2$  und Gleichung 3.4-22 ergibt sich

$$\bar{b}_{1,n-1-k,k}^1 = \lambda \bar{b}_{0,n-1-k,k+1}^2 + \lambda_1 \bar{b}_{1,n-1-k,k}^2 - \lambda_2 \bar{b}_{0,n-k,k}^2. \quad (3.4-23)$$

Dies entspricht der Bedingung für  $GC^1$ -Stetigkeit entlang der Randkurve  $u = 0$  zweier benachbarter Dreiecks-Bézier-Flächen. Soll nun der Übergang  $C^1$ -stetig sein, d. h. die Ableitungen an der gemeinsamen Randkurve sollen gleich sein, so folgt die Bedingung hierfür aus der  $GC^1$ -Stetigkeit als Sonderfall mit  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = -1$ . Man erhält damit

$$\bar{b}_{1,n-1-k,k}^1 - \bar{b}_{0,n-1-k,k+1}^1 = \bar{b}_{0,n-k,k}^2 - \bar{b}_{1,n-1-k,k}^2. \quad (3.4-24)$$

Damit diese Bedingung erfüllt wird, müssen die Kanten des Bézier-Netzes paarweise parallel sein, weshalb sie auch Rhombenbedingung genannt wird (HOSCHEK UND LASSER [41]). Sie gilt in dieser Form allerdings nur für regelmäßige, gleichseitige Dreiecke des Parameterraums. Liegen Dreiecke vor, die nicht gleichseitig sind und deren Gestalt unterschiedlich ist, so muss die  $C^1$ -Stetigkeitsbedingung nach Gleichung 3.4-24 für diesen Fall verallgemeinert werden. Es folgt dann eine Gleichung der Form 3.4-23 für  $GC^1$ -Stetigkeit, mit dem Unterschied, dass  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  nun nicht mehr frei wählbar, sondern durch die Geometrie der Dreiecke fest vorgegeben sind. Die Faktoren  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  müssen so gewählt werden, dass die beiden komplanaren Dreiecke, die sich aus den jeweils vier beteiligten Bézier-Punkten ergeben, den beiden Grunddreiecken ähnlich sind. Abbildung 3.10 veranschaulicht diesen Sachverhalt.

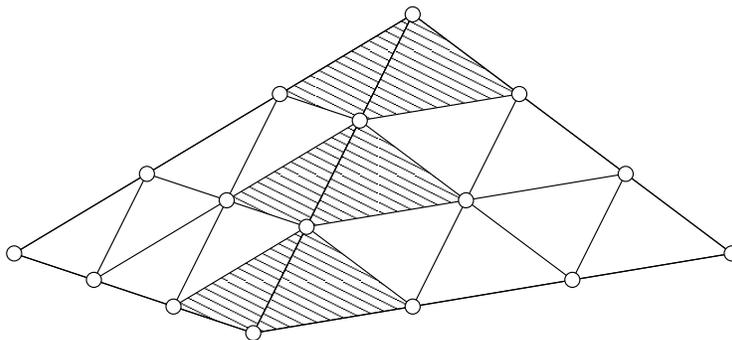


Abbildung 3.10: Geometrische Deutung der  $C^1$ -Stetigkeit.

Bei funktionswertig gegebenen Dreiecks-Flächen ist diese Bedingung durch die regelmäßige Verteilung der Bézier-Punkte über das Parameteregebiet erfüllt (HOSCHEK UND LASSER [41]). Die Ordinaten der  $\bar{b}_{ijk}$  werden in diesem Fall immer über den Abszissen  $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n})$  aufgetragen. Es muss deshalb für  $C^1$ -Stetigkeit nur noch die Komplanaritätsbedingung für die Dreiecke entlang der gemeinsamen Randkurve eingehalten werden.

Zwei zunächst frei wählbare Festlegungen beeinflussen also die Komplexität der Bedingungen für den  $C^1$ -stetigen Anschluss einer Dreiecks-Bézier-Fläche an die andere, nämlich die Aufteilung des gesamten zu interpolierenden Gebiets in regelmäßige, gleichseitige Dreiecke und die Definition der Dreiecks-Bézier-Flächen durch funktionswertige Bézier-Koeffizienten. Die Wahl gleichseitiger, regelmäßiger Dreiecke bringt dieselben Probleme mit sich wie die Aufteilung des gesamten Gebiets in Rechtecke. Bei stark unregelmäßig verteilten Daten ergeben sich Dreiecke, die unterschiedlich stark durch Datenpunkte repräsentiert sind. Außerdem geht der zu Anfang des Kapitels beschriebene Vorteil der Möglichkeit einer Modellierung von Bruchkanten verloren und somit ist die Interpolation mit Dreiecks-Flächen nicht mehr gerechtfertigt. Die Verwendung von Tensor-Produkt-Bézier-Flächen ist dann sinnvoller, da hierbei die Transformationen zwischen kartesischem und baryzentrischem Koordinatensystem entfallen.

In der Literatur wird zur Interpolation unregelmäßig verteilter Daten (scattered data) in den meisten Fällen eine Dreiecksvermaschung über die zu interpolierenden Daten gelegt und bestimmte Übergangsbedingungen für die Dreiecks-Flächen gewählt (MCLAIN [52], FARIN [28], FRANKE [33] und NIELSON [53]). Da die Eckpunkte der Bézier-Dreiecke Flächenpunkte sind, liegen die Datenpunkte, mit denen die Dreiecksvermaschung durchgeführt wird, zwangsläufig auf der Fläche. In Abhängigkeit des Grades der Bézier-Flächenstücke sind dann die Übergangsbedingungen festzulegen, damit die noch unbekanntenen Bézier-Punkte eindeutig bestimmt werden können (z.B.  $C^1$ -Stetigkeit bei Flächenstücken 2. Grades).

Der Vorteil dabei ist, dass die Dreiecksvermaschung über eine bekannte Triangulationsmethode berechnet werden kann (SCHUMAKER [67]). Die Nachteile dieser Vorgehensweise bestehen zum einen darin, dass eine Lösung

ohne Überbestimmungen weder Abschätzungen für Genauigkeiten, noch für Zuverlässigkeiten von Beobachtungen und Unbekannten zulässt. Dies wiederum dazu führt, dass die in der Geodäsie üblichen statistischen Analysen des Beobachtungsmaterials und der geschätzten Parameter nicht durchgeführt werden können. Zum anderen kann eine Dreiecksvermaschung, die an die Datenpunkte gebunden ist, dazu führen, dass Dreiecke entstehen, die sich in Form und Größe stark voneinander unterscheiden und somit für die Interpolation ungünstige Seitenverhältnisse in den einzelnen Dreiecken auftreten.

Die Auswahl bestimmter Datenpunkte, über welche dann eine Dreiecksvermaschung gerechnet wird, beseitigt zumindest einen dieser Nachteile. Die restlichen Datenpunkte gehen als zusätzliche Beobachtungen in das lineare Gleichungssystem ein, sorgen so für Überbestimmungen, die für eine Ausgleichung notwendig sind, und ermöglichen dadurch statistische Analysen der Parameter der Ausgleichung. Auch die Form der Dreiecke, die hierdurch entstehen, kann damit beeinflusst werden. Das Ausgleichungsmodell, welches sich daraus ergibt, ist ein allgemeines gemischtes lineares Modell mit direkten Beobachtungen (CASPARY UND WICHMANN [18]). Ebenso ist eine Aufteilung des gesamten Gebietes in Dreiecke möglich, deren Eckpunkte von den Datenpunkten verschieden sind, wobei aber genügend Datenpunkte innerhalb eines jeden Dreiecks vorhanden sein müssen. Die Form der Dreiecke ist hierbei also relativ frei bestimmbar. Als Beobachtungen gehen die einzelnen Koeffizienten der Zeitfunktionen (Abschnitt 3.3) in die Ausgleichung ein. Die Unbekannten sind die Bézier-Punkte der Dreiecks-Flächen. Der funktionale Zusammenhang ergibt sich aus der Gleichung

$$\bar{f}_l(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} \bar{b}_{i,j,k}^l B_{i,j,k}^n(u, v, w) \quad (3.4-25)$$

mit dem Index  $l$ , der das jeweilige Dreieck kennzeichnet. Eine Linearisierung der Beobachtungsgleichungen entfällt, da das Modell bereits linear ist. Es müssen lediglich noch die Bedingungsgleichungen aufgestellt werden, welche die geforderte  $C^1$ -Stetigkeit gewährleisten. Diese Bedingungsgleichungen ergeben sich aus den Gleichungen 3.4-22 und 3.4-24.

Vor der Wahl der Art der Koeffizienten  $\bar{b}_{ijk}$  (reelle Zahlen oder vektorwertige Koeffizienten), welche die Komplexität der Formulierung der  $C^1$ -Stetigkeitsbedingungen beeinflusst, sollte das zu interpolierende Datenmaterial analysiert werden. Wählt man vektorwertige Bézier-Koeffizienten, so ergeben sich mehr Gestaltungsmöglichkeiten für die Form der Fläche. Die Bézier-Punkte sind somit nicht nur in Richtung der Höhenkomponente verschiebbar, sondern auch in der  $x - y$ -Ebene. Die Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten ist allerdings um das Dreifache größer als bei reellen Zahlen. Außerdem kommt noch eine zusätzliche Bedingungsgleichung für die Faktoren  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  aus Gleichung 3.4-23 hinzu.

Bei Hangrutschungen und auch bei den meisten anderen Anwendungen der geodätischen Deformationsanalyse sind außer den Geschwindigkeiten der Verschiebungen der Objektpunkte auch die Änderungen der Bewegungen in Abhängigkeit des Ortes in der Regel sehr gering. Diese Tatsache hat nun wiederum zur Folge, dass die Koeffizienten der Zeitfunktion zu einem relativ kleine Zahlenwerte annehmen und sich zum anderen von Punkt zu Punkt auch nicht sehr stark ändern. Bei der flächenhaften Interpolation dieser Koeffizienten der Zeitfunktion ist demnach die Ebene bereits eine 1. Näherung, die für die Berechnung von Näherungswerten für die Koeffizienten  $\bar{b}_{ijk}$  der Bézier-Flächen herangezogen werden kann. Da die zu berechnende, ausgleichende Fläche aus genannten Gründen nicht zu sehr von der Ebene als 1. Näherung abweichen wird, genügen funktionswertig definierte Bézier-Flächen, um die Datenpunkte ausreichend gut zu approximieren.

### 3.4.5 Bestimmung der Unbekannten durch Ausgleichung

Um ein lineares Gleichungssystem für eine ausgleichende Dreiecks-Bézier-Spline-Fläche aufstellen zu können, muss das gesamte Gebiet zunächst in Dreiecke aufgeteilt werden. Sodann müssen für sämtliche Datenpunkte baryzentrische Koordinaten aus den euklidischen Koordinaten  $x$  und  $y$  berechnet werden. Jeder Datenpunkt erhält somit baryzentrische Koordinaten und zusätzlich einen Index  $l$ , der die Zugehörigkeit zu einem bestimmten Dreieck festlegt. Die Bézier-Flächenstücke sollen vom Grad  $n = 3$  sein. Für einen Datenpunkt, der innerhalb des Dreiecks mit dem Index  $l$  liegt, lautet die Verbesserungsgleichung

$$l(u_l, v_l, w_l) = \bar{b}_{100}^l B_{100}^3(u_l, v_l, w_l) + \dots + \bar{b}_{001}^l B_{001}^3(u_l, v_l, w_l) .$$

Für jeden Datenpunkt  $P_l$  ergibt sich eine Gleichung mit zehn Summanden. Jeder Summand besteht aus einem Bézier-Punkt, multipliziert mit dem entsprechenden Bernstein-Polynom. Die Anzahl und die geometrische Anordnung der Bézier-Punkte soll hier nochmals veranschaulicht werden:

$$\begin{array}{cccc}
 & & & b_{030}^l \\
 & & b_{021}^l & b_{120}^l \\
 & b_{012}^l & b_{111}^l & b_{210}^l \\
 b_{003}^l & b_{102}^l & b_{201}^l & b_{300}^l \quad .
 \end{array}$$

Es resultieren also für jedes Dreieck zehn Unbekannte. Bei zwei benachbarten Dreiecken sind die Bézier-Punkte der gemeinsamen Randlinie aufgrund der  $C^0$ -Stetigkeitsbedingung nach Gleichung 3.4-22 jedoch identisch und treten als Unbekannte somit nur einmal auf. Die Zahl der Unbekannten hängt damit von der Anordnung der Dreiecke ab. Das erste Dreieck liefert zehn Unbekannte. Jedes weitere Dreieck mit einer gemeinsamen Kante zu einem schon bestehenden Dreieck generiert weitere sechs Unbekannte und Dreiecke mit zwei gemeinsamen Kanten bringen drei zusätzliche Unbekannte in die Ausgleichung ein.

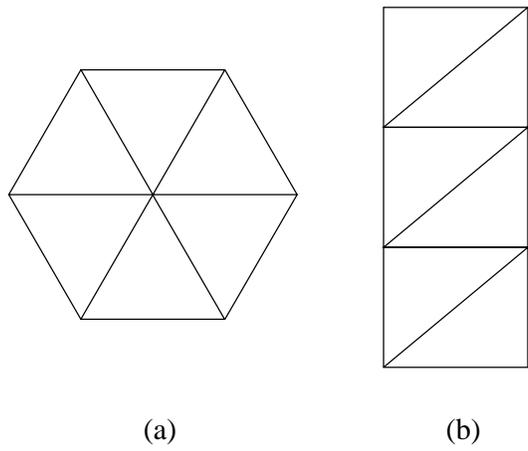


Abbildung 3.11: Anordnungen von Bézier-Spline-Dreiecken.

In Abbildung 3.11a ergeben sich  $10+4 \cdot 6+3 = 37$ , in Abbildung 3.11b  $10+5 \cdot 6 = 40$  unbekannte Bézier-Punkte.

Die Design-Matrix  $\bar{A}$  besitzt damit folgende Struktur:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix}
 B_{003}^3 & \dots & B_{300}^3 & 0 & \dots & & & & & 0 \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\
 B_{003}^3 & \dots & B_{300}^3 & 0 & \dots & & & & & 0 \\
 0 & \dots & 0 & B_{003}^3 & \dots & B_{300}^3 & 0 & \dots & & 0 \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & B_{003}^3 & \dots & B_{300}^3 & 0 & \dots & & 0 \\
 \vdots & & & & & & & \ddots & & \vdots \\
 \vdots & & & & & & & \ddots & & \vdots \\
 0 & \dots & & & & & \dots & 0 & B_{003}^3 & \dots & B_{300}^3 \\
 \vdots & & & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & \dots & & & & & \dots & 0 & B_{003}^3 & \dots & B_{300}^3
 \end{pmatrix}$$

Im obigen Beispiel sind in jeder Zeile der Designmatrix jeweils zehn Positionen mit den Bernstein-Polynomen besetzt, die mit den entsprechenden Bézier-Punkten korrespondieren. Die  $B_{ijk}^3$  sind dabei abhängig von den

baryzentrischen Koordinaten der zu der jeweiligen Zeile der Designmatrix gehörenden Beobachtung. Es ergibt sich eine Blockstruktur. Für jedes Dreieck der Vermaschung entsteht ein Block aus zehn Spalten. Die Anzahl der Zeilen der Blöcke entspricht der Anzahl der Datenpunkte, die innerhalb des jeweiligen Dreiecks liegen. Der Unbekanntenvektor  $\bar{x}$  ergibt sich damit zu:

$$\bar{x}^T = ( \bar{b}_{003}^1 \quad \bar{b}_{012}^1 \quad \dots \quad \bar{b}_{300}^1 \quad \bar{b}_{003}^2 \quad \dots \quad \bar{b}_{300}^2 \quad \dots \quad \bar{b}_{003}^l \quad \dots \quad \bar{b}_{300}^l ).$$

Er enthält für jedes Dreieck zehn Koeffizienten. Die Bedingungen zwischen den Unbekannten, die für die  $C^0$ -Stetigkeit entlang der Dreiecksseiten notwendig sind, ergeben sich aus der Gleichung 3.4-22 zu

$$\bar{b}_{0,3-k,k}^l = \bar{b}_{0,3-k,k}^{l+1} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, 3 \quad \text{entlang einer Kante } u = 0,$$

$$\bar{b}_{3-k,0,k}^l = \bar{b}_{3-k,0,k}^{l+1} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, 3 \quad \text{entlang einer Kante } v = 0,$$

$$\bar{b}_{3-k,k,0}^l = \bar{b}_{3-k,k,0}^{l+1} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, 3 \quad \text{entlang einer Kante } w = 0.$$

Die Bedingungsgleichungen mit denen  $C^1$ -Stetigkeit erreicht wird, ergeben sich aus der Gleichung 3.4-24 zu

$$\bar{b}_{1,3-1-k,k}^l - \bar{b}_{0,3-1-k,k+1}^l = \bar{b}_{0,3-k,k}^{l+1} - \bar{b}_{1,3-1-k,k}^{l+1} \quad \text{entlang einer Kante } u = 0,$$

$$\bar{b}_{3-1-k,1,k}^l - \bar{b}_{3-1-k,0,k+1}^l = \bar{b}_{3-k,0,k}^{l+1} - \bar{b}_{3-1-k,1,k}^{l+1} \quad \text{entlang einer Kante } v = 0,$$

$$\bar{b}_{3-1-k,k,1}^l - \bar{b}_{3-1-k,k+1,0}^l = \bar{b}_{3-k,k,0}^{l+1} - \bar{b}_{3-1-k,k,1}^{l+1} \quad \text{entlang einer Kante } w = 0.$$

Lösungen derartiger Ausgleichungsprobleme finden sich beispielsweise in HÖPCKE [42], KOCH [47] und CASPARY UND WICHMANN [18]. Abhängig von der Besetzungsstruktur der Matrizen und den Eigenschaften wie Invertierbarkeit oder Rangdefekt kommen unterschiedliche Rechenverfahren zum Einsatz. In NKUITE [55], CASPARY UND WICHMANN [18], ENGELN-MÜLLGES UND REUTER [27] wird auf diese Problematik eingegangen.

Die Dimension der obigen Designmatrix lässt sich verkleinern, wenn diejenigen Bézier-Punkte, die auf einer gemeinsamen Kante zweier Dreiecke liegen, als nur eine Unbekannte eingeführt werden, anstatt für jedes Dreieck zehn Unbekannte anzusetzen. So verkürzt sich der Unbekanntenvektor beträchtlich, doch geht die Blockstruktur der Designmatrix dabei verloren und kann folgendermaßen aussehen:

$$\begin{pmatrix} B_{003}^3 & B_{012}^3 & \dots & B_{120}^3 & B_{210}^3 & B_{300}^3 & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ B_{003}^3 & B_{012}^3 & \dots & B_{120}^3 & B_{210}^3 & B_{300}^3 & 0 & \dots & & 0 \\ B_{003}^3 & 0 & \dots & B_{120}^3 & B_{210}^3 & B_{300}^3 & B_{021}^3 & \dots & B_{210}^3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \end{pmatrix}.$$

Die Blöcke schieben sich teilweise untereinander. Das lineare Gleichungssystem wird damit zwar unübersichtlicher, dafür entfallen jedoch die Bedingungsgleichungen für  $C^0$ -Stetigkeit, da sich der  $C^0$ -stetige Anschluss der Dreiecks-Flächen durch diese Vorgehensweise zwangsläufig ergibt. Durch die wesentlich kleinere Designmatrix und die Elimination der  $C^0$ -Stetigkeitsbedingungen wird der Rechenaufwand erheblich verringert. Die Bedingungsgleichungen für  $C^1$ -Stetigkeit bleiben von der Struktur der Designmatrix unberührt. Sie müssen nach Gleichung 3.4-24 formuliert werden.

Die theoretischen Überlegungen und Ableitungen zur Analyse von Deformationen an Hangrutschungen werden im folgenden Kapitel durch eine Berechnung mit realen Messdaten am Beispiel des Blockgletschers Macun I im Unterengadin in der Schweiz getestet. In dieser Beispielrechnung erfolgt eine flächenhafte Interpolation mit Monomen als Basisfunktionen, wie in Abschnitt 3.3.1 beschrieben.

## 4 Testrechnung mit realen Daten am Beispiel des Macungletschers in der Schweiz

Der Beispielrechnung ist eine kurze Einführung in die Grundlagen der Gletscherbewegung vorangestellt.

### 4.1 Gletscher und ihre Bewegung

Gletschereis bildet sich durch die kontinuierliche Ansammlung von Schnee über mehrere Jahre hinweg. Voraussetzung dafür ist, dass der im Winter gefallene Schnee im Sommer nicht vollständig abschmilzt. Je weniger Schnee abschmilzt, desto mehr Eis entsteht. Für die Gletscherbildung sind daher die Temperaturen im Sommer und nicht im Winter entscheidend. Durch eine thermische und druckbedingte Metamorphose wird der Schnee in Gletschereis umgewandelt (KLOSTERMANN [46]). Durch Anschmelzen verdichten sich Schneekristalle und Flocken. Die Strukturen der Schneekristalle werden dabei abgebaut und es bildet sich zunächst Altschnee, dann Firn. Durch weitere Verdichtung wird dieser zu Firneis, woraus durch Rekristallisation schließlich Gletschereis mit einer Dichte von etwa  $0.91 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  entsteht (KLOSTERMANN [46]). Die jährlich hinzukommende Schneemenge wird als Akkumulation bezeichnet.

Das Firnfeld, das ganzjährig von Schnee bedeckt ist, wird durch Schneefall, Regen und Lawinen ernährt. In diesem sogenannten Nährgebiet bildet sich der Gletscher und fließt als Gletscherzunge talabwärts. Unterhalb der Schneegrenze ist der Gletscher nicht mehr ganzjährig von Schnee bedeckt. Dort beginnt das Zehrgebiet, in dem mehr Eis abschmilzt als neues gebildet wird. Die jährliche Volumenabnahme von Eis und Schnee durch Abschmelzen und Verdunsten wird mit Ablation bezeichnet. Das Nährgebiet ist mindestens doppelt so groß wie das Zehrgebiet (SCHREINER [65]). Die Differenz zwischen Akkumulation und Ablation bestimmt das Wachstum oder den Rückzug eines Gletschers (PRESS UND SIEVER [56]).

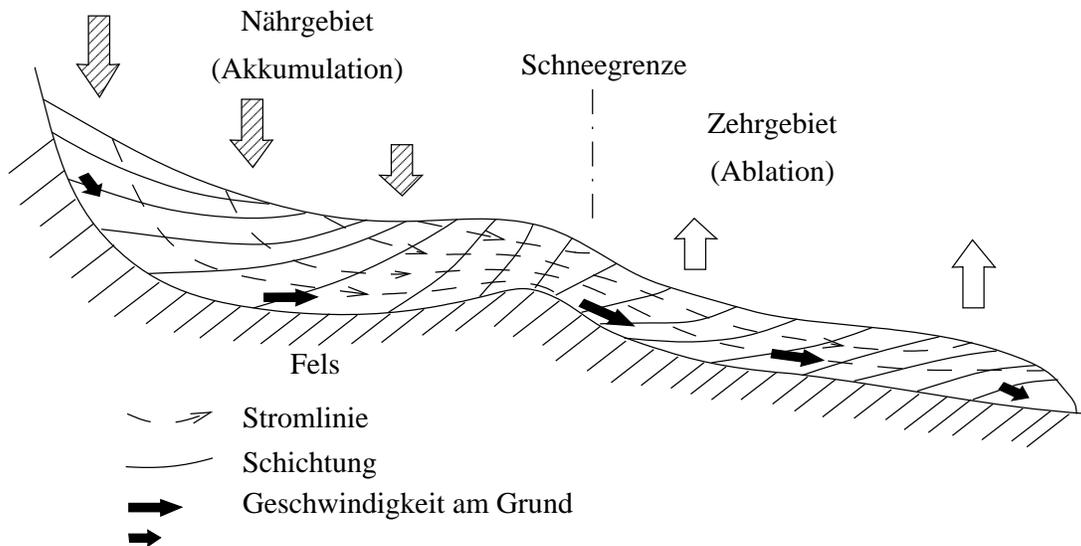


Abbildung 4.1: Schematischer Längsschnitt durch einen alpinen Gletscher. Die Stromlinien sind die Wege, welche die Partikel im Gletscher zurücklegen (aus SCHREINER [65]).

Die Ursache für eine Bewegung des Gletschers liegt im Gewicht des Eises, das sich dem Gefälle folgend bewegt. Gesteuert wird die Bewegung von der Schwerkraft, dem Druck und der Plastizität der Eismasse (KLOSTERMANN [46]). Die Bewegung kann in eine Gleitbewegung auf der Felsoberfläche (basales Gleiten) und eine Kriechbewegung unterteilt werden. Mit der Kriechbewegung geht eine plastische Verformung des Eises einher. Sie wird durch Gleiten innerhalb der Eiskristalle hervorgerufen und hängt in erster Linie von der Mächtigkeit des Gletschers und dem Gefälle der Oberfläche ab. Basales Gleiten ist nur dann möglich, wenn die Temperaturen an der Gletschersohle über dem Schmelzpunkt des Eises liegen. Schmilzt dort das Eis, so entsteht eine Schmierschicht aus Wasser, auf der das darüberliegende Eis gleiten kann. Liegen die Temperaturen an der Basis des Gletschers unter dem Gefrierpunkt, so ist der Gletscher am Untergrund festgefroren (PRESS UND SIEVER [56]) und die

Bindung zwischen Fels und Eis ist stärker als innerhalb des Eises. Die Schubspannung wird daher durch Bewegung innerhalb des Eises abgebaut (SCHREINER [65]).

Das Querprofil eines Gletschers zeigt, dass das Eis in den Randbereichen langsamer fließt als in der Mitte. Außerdem nimmt die Geschwindigkeit von der Oberfläche zur Gletschersohle hin ab. Der Grund hierfür liegt in der Reibung am anstehenden Fels. Im oberen Teilbereich eines Gletschers (bis in etwa 50 m Tiefe) ist der Überlagerungsdruck noch relativ gering. Das Eis verhält sich wie ein starrer Körper, der durch das plastische Fließen des darunter liegenden Eises Gletscherspalten bildet (PRESS UND SIEVER [56]).

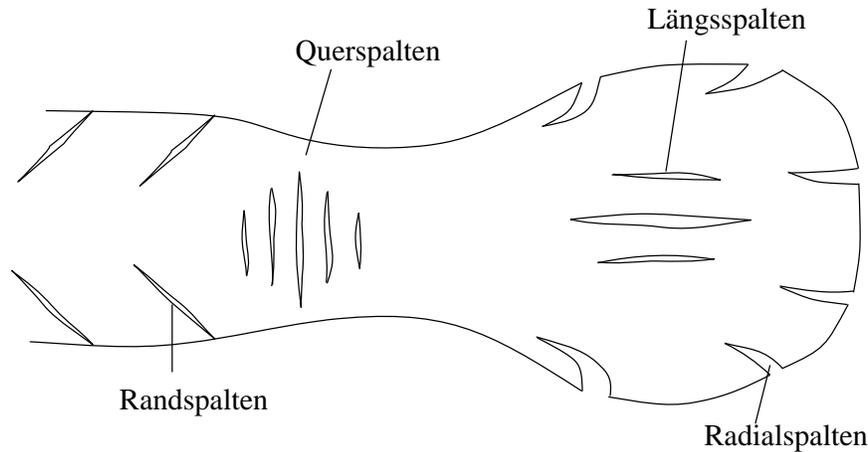


Abbildung 4.2: Verschiedene Arten von Spalten in einem Gletscher. (aus KLOSTERMANN [46]).

## 4.2 Der Blockgletscher Macun I

Die Messdaten für die Testrechnung stammen vom Blockgletscher Macun I im Unterengadin in den Schweizer Alpen. Er liegt im Großkar von Macun, südlich von Lavin, und ist einer von mehreren aktiven Blockgletschern im Gebiet um die Macunseen.

Ein Blockgletscher ist eine vorwiegend aus Gesteinsschutt bestehende Masse, die an Hängen im Hochgebirge unterhalb der Schneegrenze zungenartig talabwärts kriecht (THOME [74]). Ihre Ausdehnung ist mit etwa 5 - 300 m in der Breite und 10 - 600 m in der Länge kleiner als die der Eisgletscher. Größere Blockgletscher tragen charakteristische Wülste aus flachen, konvexen Bögen auf dem Zungenende. Das Eis in den Zwischenräumen der Gesteinsblöcke ermöglicht eine Bewegung der Schuttmassen. Es ist in Oberflächennähe meist ausgeschmolzen und wird erst bei Aufgrabungen sichtbar. Im Gegensatz zu Eisgletschern sind Schutt und Eis keine getrennten Bestandteile, sondern bilden eine zusammenhängende, kriechende Masse (THOME [74]).

Das Eis im Blockgletscher entsteht durch die Vermischung von Schutt mit Schnee in Lawinen oder durch das Gefrieren nasser Schuttmassen. Es besteht keine genetische Beziehung zwischen Blockgletschern und Eisgletschern, auch wenn die Bezeichnung dies vermuten lässt. Die Zusammensetzung eines Blockgletschers kann auch aus Eis und kleinstückigem Schutt anstatt aus Gesteinsblöcken bestehen, sodass die Bezeichnung „Blockgletscher“ (aus dem Englischen „Rockglacier“ abgeleitet) in zweierlei Hinsicht irreführend ist (THOME [74]).

Der Macun I ist ein nordexponierter, sogenannter Moränenschutt-Blockgletscher, der sich aufgrund der plastischen Deformation des Eises innerhalb des Schutt-Eis-Körpers langsam hangabwärts bewegt. Die Ausdehnung des Gletschers beträgt etwa 600 m in der Länge und 300 m in der Breite. Seine größte Mächtigkeit liegt bei etwa 100 m (BARSCH [7] und BARSCH [8]). Seine östliche Flanke fällt in Richtung der Macunseen ab, während der westliche Rand vom Anstieg einer massiven Bergkette begrenzt wird, welche die Bewegungsmöglichkeiten des Gletschers in diese Richtung einschränkt.

Der Blockgletscher Macun I eignet sich für eine Beispielrechnung besonders gut, da eine hohe Anzahl von



Abbildung 4.3: Blockgletscher Macun I (Aufnahme J. BAADE, aus BARSCH UND ZICK [9]).

Punkten, verteilt auf der gesamten Gletscheroberfläche, in bisher neun Epochen in einem Zeitraum von 32 Jahren gemessen wurden. Die Bewegungen sind vermutlich auf Deformationen des Eises im Schutt-Eis-Körper zurückzuführen. Ein Gleiten auf ungefrorenem Lockermaterial zwischen der Felssohle und der Untergrenze des Permafrostes wird nach BARSCH UND ZICK [9] nicht angenommen.

Im Jahre 1965 wurden von dem Geographischen Institut der Universität Basel 125 Punkte auf dem Blockgletscher markiert und von zwei nördlich im anstehenden Fels vermarkten Festpunkten FP1 und FP2 durch Vorwärtseinschneiden koordinatenmäßig bestimmt. Es fanden anschließend fast jährlich Wiederholungsmessungen statt. Es waren jedoch nicht alle Messepochen auswertbar, da zum Teil die Originaldaten nicht mehr vorhanden waren. Deswegen wurde auf Dateien zurückgegriffen, in denen vermutlich falsche Daten gespeichert waren (bei 54 Punkten übereinstimmende Messwerte der Richtungsbeobachtung in den Epochen 1971 und 1973). In der Epoche 1968 gab es Probleme mit der Stabilität der Orientierungen der Teilkreise, sodass diese Messepoche insgesamt unbrauchbar war. Näher beschrieben sind diese Probleme bei BARSCH UND ZICK [9].

Seit 1985 werden die Punkte nicht mehr durch Vorwärtseinschneiden von FP1 und FP2 aus, sondern durch polares Anhängen von FP2 aus mit Präzisionstheodolit und optischem Distanzmesser aufgenommen. Die Messdaten der verschiedenen Epochen haben aufgrund der Verwendung eines unterschiedlichen Instrumentariums und der unterschiedlich qualifizierten Beobachter keine einheitliche Genauigkeit. Das gesamte Datenmaterial wurde am Geodätischen Institut der Universität Karlsruhe gesichtet und aufbereitet. Offensichtlich unbrauchbares Datenmaterial wurde ausgesondert. Messdaten, die zuverlässig erschienen, wurden für weitere Analysen verwendet. Die in diesem Zusammenhang durchgeführten Untersuchungen sind bei BARSCH [6], BARSCH UND ZICK [9], FROEHLIS [35], EHLERT [26] und ZICK [78] dokumentiert. Nach den Auswertungen der Messungen bleiben endgültig noch die neun Messepochen aus den Jahren 1965, 1967, 1971, 1977, 1985, 1988, 1991, 1994 und 1997 für die Berechnung von Bewegungsgleichungen und Deformationsmaßen.

Insgesamt beinhaltet das Datenmaterial 123 Punkte, wobei jedoch nicht alle Koordinaten für jeden Punkt in sämtlichen Epochen berechnet werden konnten. Dies liegt daran, dass Punkte neu definiert werden mussten, weil sie beispielsweise an der Gletscherstirn abgestürzt sind (Punkte 120-125 BARSCH UND ZICK [9]), oder aber, weil

Teile der Messungen unbrauchbar waren. Es lagen keine Genauigkeitsinformationen in Form von Standardabweichungen oder Varianz-Kovarianzmatrizen für die Punkte vor. Mit welcher Präzision die Punkte in ihrer Lage und Höhe bestimmt wurden, lässt sich lediglich über das verwendete Instrumentarium und die örtlichen Gegebenheiten abschätzen. Für die Richtungsbeobachtungen wurde der Präzisionstheodolit Kern DKM 2 oder der Tachymeter Geodimeter System 400 eingesetzt. Die Genauigkeit der Richtungen liegt somit etwa bei  $\pm 0.5$  mgon. Die Entfernungen wurden entweder mit dem Distanzmesser DM 503 von Kern oder dem Geodimeter System 400 gemessen. Bei Streckenlängen von bis zu 600 m ergibt sich damit eine Streckengenauigkeit von etwa  $\pm 1$  cm.

Berücksichtigt man noch Ungenauigkeiten in der Zentrierung und Aufstellfehler bei den Objektpunkten, so ergibt sich bei einer Entfernung von etwa 600 m eine Punktlagegenauigkeit von etwa  $\pm(1 - 2)$  cm. Die Höhe der Punkte wurde trigonometrisch bestimmt. Wegen Unsicherheiten in der Bestimmung der Refraktionskonstanten ist die Genauigkeit der Höhen sicherlich um etwa 1 - 2 cm schlechter.

Bei den Analysen wurden nur Punkte verwendet, die in mindestens sechs Epochen vorlagen. Von den ursprünglich 123 Punkten blieben damit noch 107 Punkte, verteilt über verschiedene Bereiche des Gletschers. Die Abbildung 4.4 zeigt die Verteilung der Punkte auf dem Gletscher.

Die Auswertungen von BARSCH UND ZICK [9] und ZICK [78] ergaben unterschiedliche Durchschnittsgeschwindigkeiten für Bewegung in den einzelnen Teilbereichen. Die Geschwindigkeit von 1965 -1967 ist im Gesamtbereich höher als in den Jahren danach. Von 1967 - 1988 blieb sie in etwa konstant und nahm ab 1988 vor allem in den Bereichen I und II wieder zu. Die Tabelle 4.1 ist ein Auszug aus der Arbeit ZICK [78] und zeigt die Durchschnittsgeschwindigkeiten der Bewegungen einzelner Bereiche.

Bereiche n=Anzahl der Punkte	1965-1967 $\bar{v} \pm m_{\bar{v}}$ [cm/a]	1967-1988 $\bar{v} \pm m_{\bar{v}}$ [cm/a]	1988-1991 $\bar{v} \pm m_{\bar{v}}$ [cm/a]	1991-1994 $\bar{v} \pm m_{\bar{v}}$ [cm/a]
Bereich I ( $n = 36$ )	$24.3 \pm 0.6$	$14.2 \pm 0.2$	$17.6 \pm 0.5$	$26.7 \pm .7$
Bereich II ( $n = 10$ )	$23.6 \pm 1.0$	$14.3 \pm 0.7$	$15.4 \pm 1.1$	$24.9 \pm 2.3$
Bereich III ( $n = 10$ )	$13.8 \pm 0.9$	$9.6 \pm 0.4$	$8.4 \pm 0.3$	$10.6 \pm 0.6$
Bereich IV ( $n = 5$ )	$5.9 \pm 0.8$	$7.7 \pm 0.6$	$6.4 \pm 0.6$	$7.8 \pm 0.6$
Bereich V ( $n = 10$ )	$7.6 \pm 0.7$	$6.0 \pm 0.5$	$4.7 \pm 0.4$	$7.7 \pm 0.5$
Bereich VI ( $n = 6$ )		$1.7 \pm 0.3$	$2.1 \pm 0.4$	$2.5 \pm 0.6$

Tabelle 4.1: Durchschnittsgeschwindigkeiten der Bewegungen in den einzelnen Gletscherbereichen (aus ZICK [78]).

Die Punkte mit den Nummern 79 - 89 sind keinem bestimmten Bereich zugeordnet, wurden aber in den Analysen mit Ausnahme des Punktes 89 verwendet. Dieser Punkt weist ebenso wie die Punkte 58 und 61 ein stark von allen umliegenden Punkten abweichendes Bewegungsverhalten auf.

Bei den Punkten 58 und 61 ist dies höchstwahrscheinlich auf die Topographie zurückzuführen. Zwischen den beiden Punkten liegt eine kleine Senke, auf deren tiefste Stelle sich die Punkte zubewegen. Das Verhalten des Punktes 89 ist damit erklärbar, dass der Block, auf dem der Punkt vermarktet wurde, unabhängig von der Blockgletschermasse ins Rutschen oder Rollen kam.

Die Berechnungen, die für die einzelnen Schritte der Deformationsanalyse durchgeführt wurden, erfolgten mit Hilfe von Programmen, die speziell für die vorliegende Arbeit erstellt wurden. Es wurde auf eine weitgehend objektorientierte Implementierung in der Programmiersprache C++ geachtet. Der Programmtext wurde nach Gesichtspunkten der Lesbarkeit und Übersichtlichkeit gestaltet. Der Hauptteil der Berechnungen kann mit den Elementfunktionen der implementierten Klassen durchgeführt werden. Das Hauptprogramm zur Berechnung von Deformationsmaßen mit Hilfe der erstellten Klassen bleibt damit sehr übersichtlich. Eine Dokumentation der Klassen findet sich im Anhang.

Zum Rechnen mit Matrizen wurde die frei verfügbare Matrizenbibliothek *Newmat09*, erstellt von Robert B. Da-

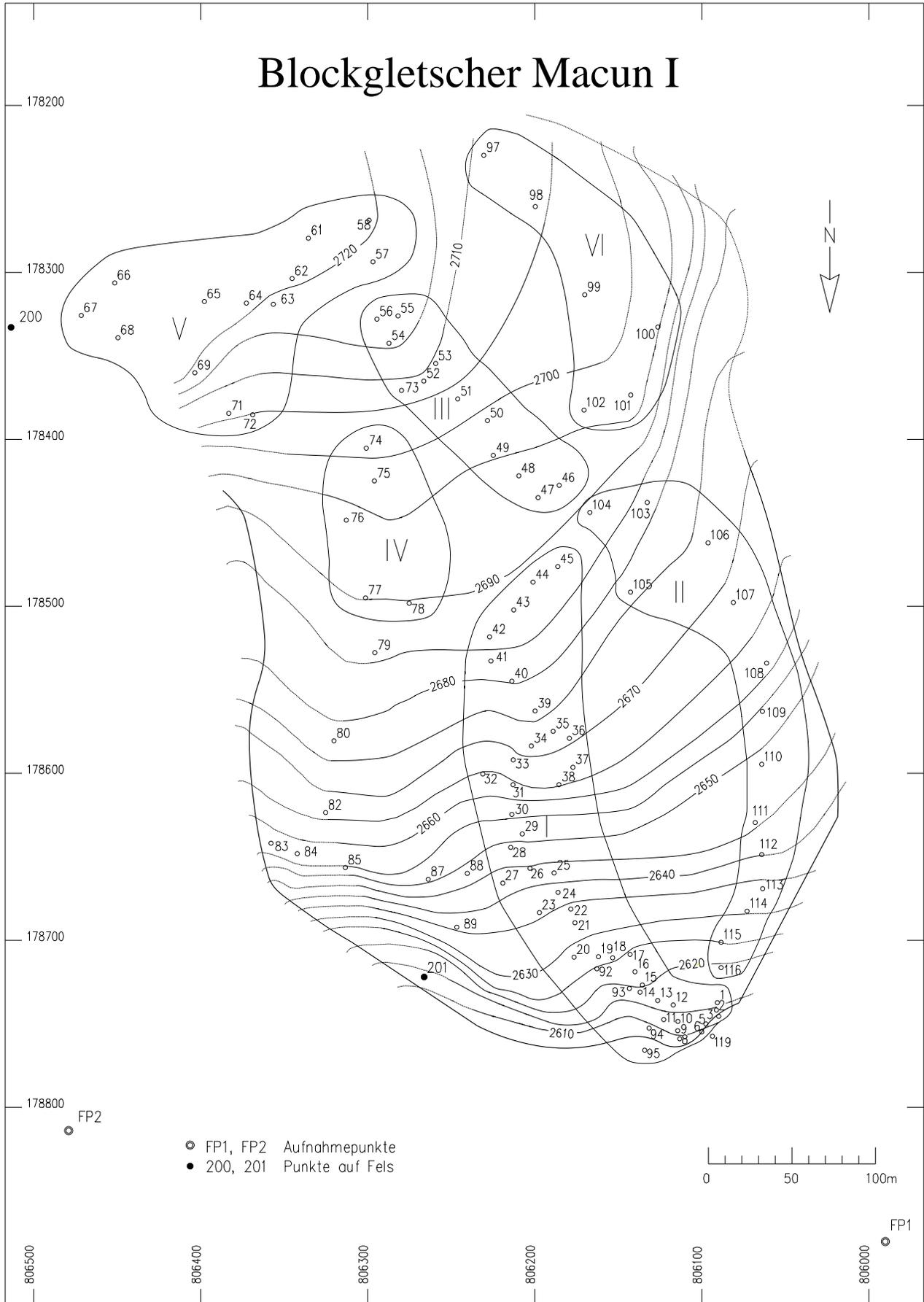


Abbildung 4.4: Lage der Punkte auf dem Gletscher (aus ZICK [78]).

vies, in die Programme eingebunden. Die Matrizenbibliothek ist in DAVIES [22] dokumentiert. Weiterführende Literatur zur Klassenbibliothek Newmat09 findet sich bei DAVIES [21] und EDELBUTTEL [25]. Für allgemeine Literatur zur Programmierung in C++ wird auf STROUSTRUP [72] und BREYMAN [14] verwiesen. In RUMBAUGH ET AL [59] werden Techniken des objektorientierten Programmierens behandelt.

### 4.3 Wahl des Koordinatensystems

Für die Objektpunkte und die Festpunkte liegen sowohl Lagekoordinaten als auch Höhen vor. Zusätzlich zu den Festpunkten FP1 und FP2 wurden die Punkte 200 und 201 in den Jahren 1991 bzw. 1994 im anstehenden Fels vermarktet.

	Y-Wert	X-Wert	Z-Wert	
FP1	806007.85	178863.35	2678.20	$t_{FP200}^{FP100} = 308.5983gon$
FP2	806496.85	178796.90	2742.60	
<hr/>				
200	806529.72	178316.09	2748.23	
201	806283.88	178704.44	2615.12	

Tabelle 4.2: Koordinaten der Festpunkte.

Prinzipiell ist die Wahl des Koordinatensystems, in dem die Berechnungen durchgeführt werden, nicht von entscheidender Bedeutung. Sämtliche Berechnungen hätten ohne weiteres im gegebenen Koordinatensystem durchgeführt werden können. Durch eine Transformation in ein Koordinatensystem, das an die Problemstellung angepasst ist, bieten sich jedoch folgende Vorteile: Zum einen werden die Zahlenwerte durch eine Verschiebung des Ursprungs kleiner und sind damit numerisch leichter zu handhaben. Zum anderen vereinfachen sich die Formeln und Matrizen. So bietet sich beispielsweise ein Kugelkoordinatensystem an, falls die Deformationen punktsymmetrisch sind. Ein weiterer Vorteil ist, dass sich Zwischenergebnisse wesentlich leichter interpretieren lassen.

Für vorliegendes Beispiel wurde ein dreidimensionales, kartesisches Koordinatensystem gewählt. Der Nullpunkt wurde in das obere Ende des Gletschers in den Punkt 62 etwa im Stromstrich des Gletschers gelegt. Unter Stromstrich versteht man eine Linie, die in Fließrichtung des Gletschers, in der Mitte zwischen dem linken und dem rechten Rand verläuft. Die Richtung der positiven  $X$ -Achse ist durch den Punkt 8, ebenfalls im Stromstrich an der Gletscherstirn, festgelegt. Die  $Y$ -Achse verläuft senkrecht zur Verbindungslinie dieser beiden Punkte in horizontaler Richtung. Die  $Z$ -Achse vervollständigt das Koordinatensystem zu einem Rechtssystem. Durch diese Festlegung wird erreicht, dass die Richtungen der Koordinatenachsen den erwarteten Hauptbewegungsrichtungen und damit auch den erwarteten Hauptdeformationsrichtungen entsprechen.

Der Vergleich der Koordinaten eines Punktes zu verschiedenen Zeitpunkten lässt damit auch Rückschlüsse auf den Gradienten der Bewegung des Punktes in Richtung der Hangneigung wie auch quer zur Hangneigung zu. Zudem lässt sich aus den Änderungen der  $Z$ -Koordinaten beurteilen, ob sich die Hangoberfläche an einer bestimmten Stelle aufwölbt oder absenkt. Die Wahl des Koordinatensystems beeinflusst die Besetzung des Greenschen Verzerrungstensors  $\underline{E}$  (bzw. des infinitesimalen Deformationstensors  $\underline{\epsilon}$ ). Nach Abbildung 2.3 entsprechen die Elemente in der Hauptdiagonalen den Dehnungen von Linienelementen, welche in der Bezugsplatzierung parallel zu den Koordinatenachsen lagen, während die Elemente auf den Nebendiagonalen die Winkeländerungen von ehemals rechten Winkeln angeben. Die Wahl des Koordinatensystems mit parallel zu den erwarteten Hauptdehnungsrichtungen liegenden Achsen soll bewirken, dass die dominanten Elemente des Deformationstensors auf dessen Hauptdiagonalen liegen und die Elemente auf den Nebendiagonalen kleine Zahlenwerte annehmen. Dadurch soll die Interpretation des infinitesimalen Deformationstensors erleichtert werden.

### 4.4 Übergang von den Epochenkoordinaten zum Kontinuum

Das Datenmaterial, mit dem die Deformationsanalyse durchgeführt wird, besteht aus dreidimensionalen Koordinaten diskreter Objektpunkte zu bestimmten Zeitpunkten. Diese Koordinaten wurden bereits in ein Koordinatensystem, welches für die Lösung der Problemstellung und die Interpretation der Zwischenergebnisse

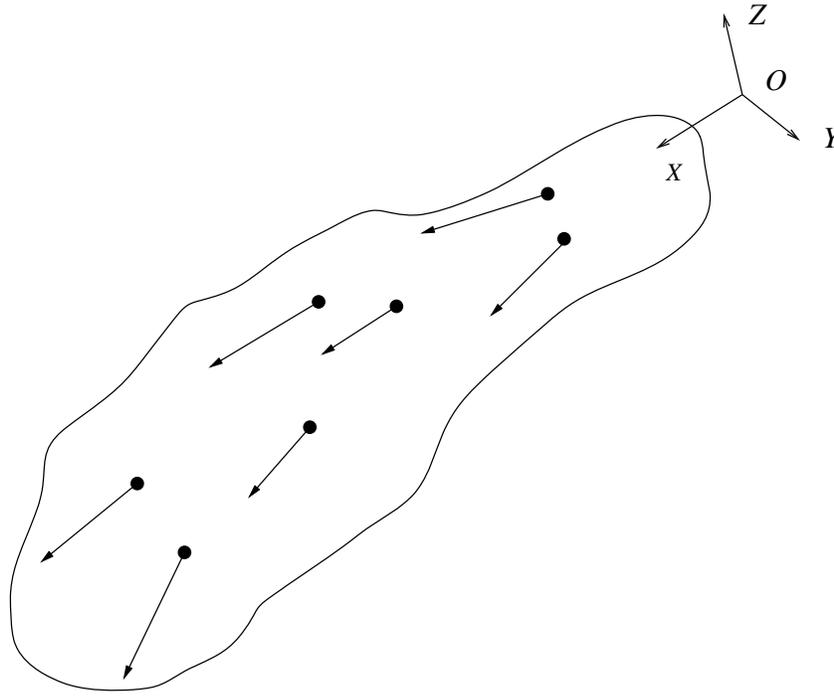


Abbildung 4.5: Lage des gewählten Koordinatensystems.

geeignet erscheint, transformiert. Um die Theorien aus Kapitel 2 zur Anwendung zu bringen, wird aus diesen Daten ein Verschiebungsvektorfeld  $\bar{u} = \bar{u}(X, Y, t)$  ermittelt. Damit wird ein Kontinuum realisiert, in dem sich Deformationsmaße wie Dehnungen und Winkeländerungen für die infinitesimale Umgebung jedes beliebigen Punktes berechnen lassen. Die Theorie zu den dafür notwendigen Interpolationen ist in den Abschnitten 3.2 und 3.3 erläutert.

Zuerst werden Funktionen  $\bar{x}_i = \bar{x}_i(t)$  ermittelt, welche die Raumkurven, die von den Objektpunkten mit der Zeit durchlaufen werden, beschreiben. Dann werden die Koeffizienten dieser Zeitfunktionen flächenhaft interpoliert, sodass diese in Abhängigkeit von  $X$  und  $Y$  vorliegen. Das Ergebnis ist ein Verschiebungsvektorfeld  $\bar{u} = \bar{u}(X, Y, t)$  in Abhängigkeit der Koordinaten  $X$ ,  $Y$  und der Zeit  $t$ . Die Vernachlässigung der  $Z$ -Komponente bei der Interpolation wurde in Abschnitt 3.3 begründet. Die Ergebnisse werden in den folgenden Abschnitten dargelegt.

#### 4.4.1 Zeitfunktionen

Als Funktionen, welche die Bewegungen der Punkte im Raum beschreiben, werden Polynome 3. Grades für jede der drei Koordinaten verwendet:

$$x = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \quad (4.4-1)$$

$$y = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 \quad (4.4-2)$$

$$z = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 . \quad (4.4-3)$$

Hierbei entsprechen die Werte  $b_0, c_0$  und  $d_0$  den Komponenten des Ortsvektors des jeweiligen Objektpunktes zur Zeit  $t = 0$ , also dem Ortsvektor  $\xi$  in der Bezugsplatzierung (Kapitel 2). Für die Interpolation der Funktionen wurden lediglich diejenigen Punkte verwendet, die in mindestens sechs Epochen aufgenommen wurden. Die Parameter der Zeitfunktionen wurden durch eine vermittelnde Ausgleichung nach dem Gauß-Markoff-Modell (KOCH [47]) mit  $v^T P v = \min$  als Zielfunktion bestimmt. Punktlagegenauigkeiten in Form von Varianz-Kovarianzmatrizen waren nicht vorhanden. Aus diesem Grund wurde in der Ausgleichung die Einheitsmatrix als Gewichtsmatrix verwendet.

Statistische Analysen der geschätzten Parameter wurden nicht durchgeführt. Um einen Überblick über die Qualität der Ergebnisse der Ausgleichungen zu erhalten, wurden die Fehlerquadratsummen  $v^T P v$  der Berechnungen für jeden Punkt und jede Koordinate berechnet. Die Zahlenwerte lagen dabei alle in einem Bereich zwischen 0.002 und 0.05, die Verbesserungen der Koordinatenwerte in den einzelnen Epochen betragen wenige Zentimeter. Bei der abgeschätzten Lagegenauigkeit der Punkte erscheinen diese Werte durchaus plausibel. Eine Eigenwertzerlegung der Normalgleichungsmatrizen der Ausgleichungen ergab Werte für die Kondition derselben, die auf eine numerisch stabile Bestimmung der Unbekannten schließen lassen. Zur Berechnung einer Konditionszahl für die Designmatrizen wurde die Formel

$$\kappa = \sqrt{\frac{\mu_{max}}{\mu_{min}}}$$

aus HÖPCKE [42] verwendet, wobei  $\mu_{max}$  den größten und  $\mu_{min}$  den kleinsten Eigenwert darstellt. Die berechneten Werte liegen in der Größenordnung von  $4 \cdot 10^4$ , d.h. die letzten vier bis fünf Stellen der Mantissen sind unsicher. Zur weiteren Prüfung der geschätzten Parameter auf Plausibilität erscheint es sinnvoll, diese graphisch zu veranschaulichen, global zu betrachten und so zu versuchen, grobe Fehler im Datenmaterial aufzudecken. Auf diese Weise wurden im vorliegenden Projekt grobe Fehler aufgedeckt. Einige Punkte fielen in der graphischen Darstellung ihrer Bewegungsparameter durch deutlich von den Nachbarpunkten abweichende Werte auf. Die Ursachen dafür konnten häufig in den Originaldaten gefunden werden (Zahlendreher, fehlende Ziffern usw.). Aufgedeckte Fehler konnten korrigiert werden, Daten mit nicht aufgedeckten Fehlern wurden gestrichen.

Die Graphen in Abbildung 4.6 zeigen den kontinuierlichen Verlauf der Koordinaten zweier ausgewählter Punkte nach den interpolierenden Funktionen und, zum Vergleich, als gestrichelte Linie eingezeichnet, die direkt aus den Messungen berechneten Koordinaten.

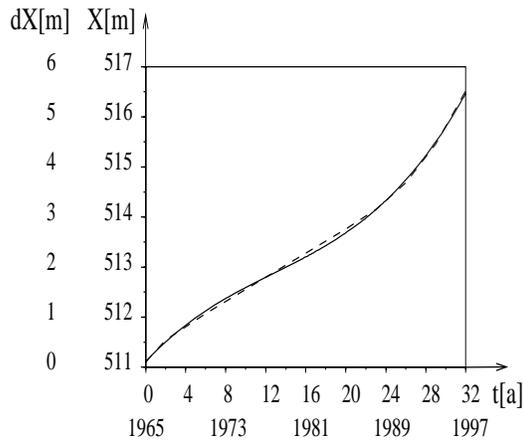
Für die Darstellungen in Abbildung 4.6 wurden ein Punkt aus dem Bereich der Gletscherstirn (Punkt 10, Graphen a - c) und ein Punkt aus dem mittleren Bereich des Gletschers (Punkt 40, Graphen d - f) ausgewählt. Da die Bewegungen in  $X$ -Richtung (Richtung der Hangneigung) wesentlich größer sind als die in  $Y$ - und  $Z$ -Richtung, musste eine unterschiedliche Skalierung der Achsen vorgenommen werden. So haben sich beispielsweise der Punkt 10 in 32 Jahren um etwa 5.3 m und der Punkt 40 um etwa 5.8 m in  $X$ -Richtung bewegt. Die Veränderung der Lage des Punktes 10 in  $Y$ -Richtung, also quer zur Hangneigung, beträgt dagegen weniger als 3 m und die des Punktes 40 nur etwa 0.15 m. Durch die Orientierung des Koordinatensystems liegt die  $Z$ -Richtung annähernd senkrecht zur Hangoberfläche. Die Gletscherbewegungen aufgrund der Schwerkraft und der Hangneigung spiegeln sich in diesem Koordinatensystem hauptsächlich in den Bewegungen in  $X$ - bzw.  $Y$ -Richtung wider, während die Bewegung in  $Z$ -Richtung einer Aufwölbung bzw. Absenkung der Gletscheroberfläche entspricht.

Die Ursache dieser Bewegung in  $Z$ -Richtung kann in der Topographie der Gletschersohle ebenso wie in der Aufschiebung oder Absenkung von Material aufgrund unterschiedlicher Bewegungsgeschwindigkeiten innerhalb der Rutschmasse liegen oder auch am Eisgehalt, der sich im Lauf der Zeit verändert. Somit spiegeln sich auch Schwankungen in der Temperatur in Bewegungen in  $Z$ -Richtung wider. Die temperaturbedingten periodischen Schwankungen innerhalb eines Jahres können mit dem vorhandenen Datenmaterial nicht erfasst werden. Hierfür sind Messungen zu verschiedenen Jahreszeiten, möglichst über mehrere Jahre hinweg, notwendig. Die vorhandenen Epochen wurden alle im Sommer gemessen, sodass nur längerperiodische Temperaturschwankungen mit Perioden von mehreren Jahren aus den Bewegungen der Objektpunkte herausgefiltert werden können. Die Aufschiebung oder Absenkung aufgrund unterschiedlicher Bewegungsgeschwindigkeiten in der rutschenden Masse wird jedoch mit großer Wahrscheinlichkeit sehr viel mehr Einfluss auf die Änderungen der  $Z$ -Koordinate der Punkte haben.

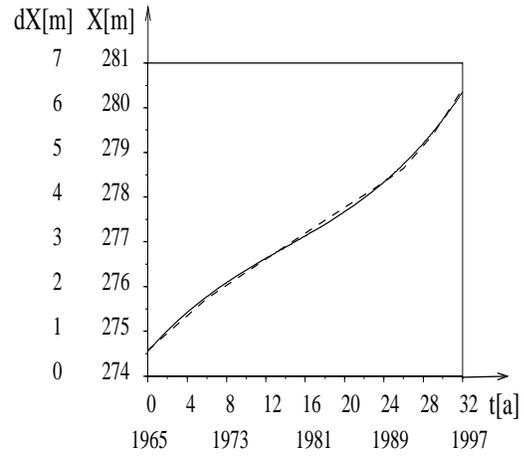
Bei den Bewegungsfunktionen der beiden ausgewählten Punkte fällt auf, dass sie für die  $X$ - sowie für die  $Y$ -Koordinaten ähnlich verlaufen. Der Verlauf der  $Z$ -Koordinaten unterscheidet sich bei den Punkten jedoch stark. Die Bewegungsfunktion des Punktes 10 in  $Z$ -Richtung (Abbildung 4.6c) zeigt eine stetige Zunahme des  $Z$ -Wertes. Der Punkt 10 liegt, wie bereits erwähnt, an der Gletscherstirn, wo Material von oben her aufgeschoben wird, wodurch sich die kontinuierliche Hebung erklären lässt. Der Betrag der Bewegung in  $Z$ -Richtung ist bei Punkt 40 um die Hälfte kleiner. Der Wert der  $Z$ -Koordinate fällt zwischen 1965 und 1971, steigt dann bis 1977 an und weist nach diesem Zeitpunkt wieder fallende Tendenz auf.

**Punkt 10**

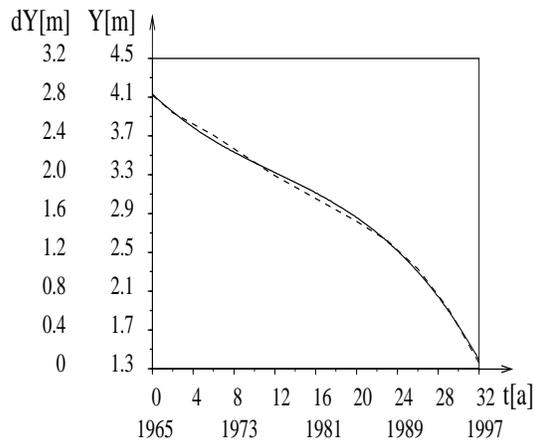
**Punkt 40**



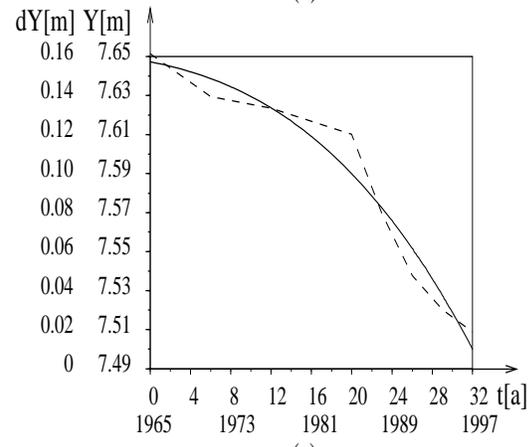
(a)



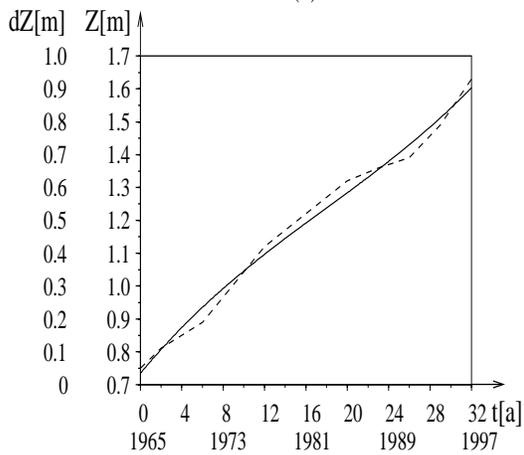
(d)



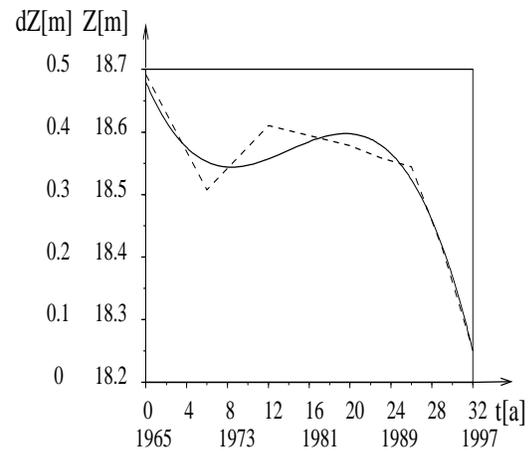
(b)



(e)



(c)



(f)

Abbildung 4.6: Beispiele von Bewegungsfunktionen.

Betrachtet man Punkte in der Nachbarschaft, so zeigt sich dort ein ähnliches Verhalten. Beim Vergleich mit Punkten oberhalb der Gletscherstirn stellt man bereits bei Punkt 14 fest, dass die  $Z$ -Koordinate von 1967 bis 1971 um 2 cm fällt, von 1971 bis 1985 um etwa 16 cm steigt und anschließend wieder auf den Wert von 1967 abfällt. Punkt 15 weist ebenfalls 1985 seinen höchsten und 1971 seinen niedrigsten  $Z$ -Wert auf. Gletscheraufwärts bis Punkt 21 ist wieder nur eine Hebung des Gletschers zu verzeichnen. In der  $X - Y$ -Ebene bewegt sich Punkt 21 um etwa 5.7 m, während bei den Punkten dazwischen Bewegungsraten von etwa 6.35 m in der Zeit von 1965 bis 1997 erhalten werden. Oberhalb dieses Teilgebietes, ab Punkt 23 bzw. 24, existiert wieder eine Zone, in der die  $Z$ -Koordinaten der Punkte einer Wellenbewegung ähnlich Punkt 40 (Abbildung 4.6f) folgen. Punkt 29 weiter gletscheraufwärts senkt sich bei 5.9 m „horizontaler“ Verschiebung von 1965 bis 1997 stetig ab. Ab Punkt 34 zeigen die Punkte ein ähnliches Verhalten wie Punkt 40 (Abbildung 4.6f), bis hinauf zu Punkt 48, der wiederum nur Hebungen aufweist, wobei sich die Bewegungen mit 3.4 m in der  $X - Y$ -Ebene deutlich verringern (Abbildung 4.4 sowie ZICK [78]). Die nächste Senkungszone beginnt bei Punkt 52 und setzt sich bis zum oberen Ende des Gletschers fort.

Die Tabelle 4.3 zeigt die Tendenzen der Bewegung in  $Z$ -Richtung einiger ausgewählter Punkte mit den zugehörigen Bewegungsraten in der  $X - Y$ -Ebene. Die Punkte liegen alle etwa im Stromstrich, beginnend mit

Punkt	Tendenz	Verschiebung [m/32a]
10	↑	6.05
12	↑	6.02
15	↓↑↓	6.26
19	↑↓	6.31
21	↑	5.73
24	↓↑↓	5.47
29	↓	5.95
33	↓	6.58
39	↓↑↓	6.63
46	↓↑→	3.83
48	↑	3.47
52	↓	3.43

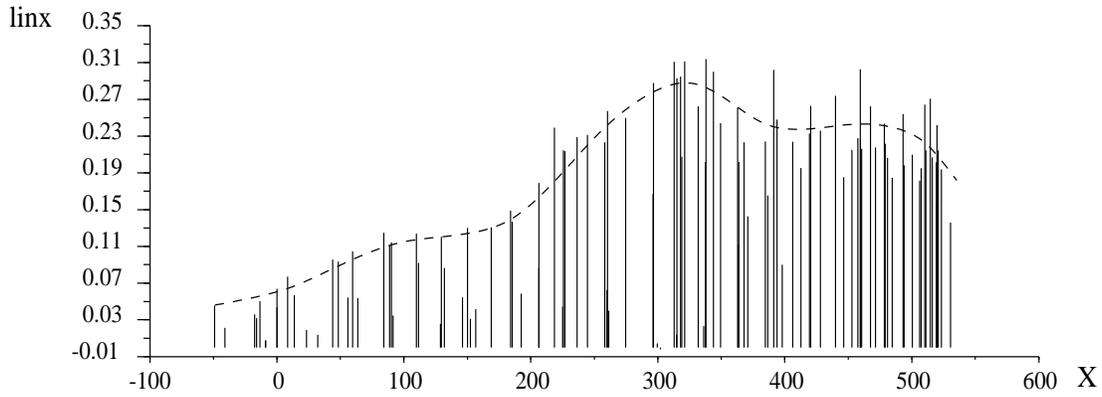
Tabelle 4.3: Tendenz der Bewegung in  $Z$ -Richtung mit der zugehörigen Bewegungsrate in der  $X - Y$ -Ebene.

der Nummer 10 an der Gletscherstirn bis zum Punkt 52, der sich fast am oberen Ende des Gletschers befindet.

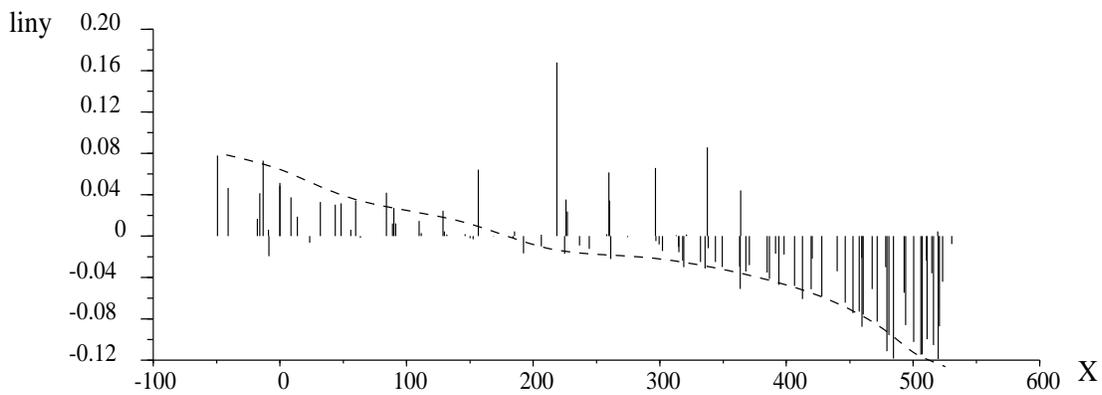
Aus der Tabelle geht hervor, dass jeweils oberhalb von Punkten mit steigender Tendenz in der  $Z$ -Koordinate Punkte mit höherer Verschiebungsgeschwindigkeit in der  $X - Y$ -Ebene liegen. Die Punkte oberhalb derjenigen mit fallender Tendenz in der  $Z$ -Koordinate dagegen werden mit geringerer Geschwindigkeit in der  $X - Y$ -Ebene verschoben.

Anhand der Graphen in Abbildung 4.6 wurden die Bewegungsfunktionen zweier Punkte miteinander verglichen. Diese Funktionen setzen sich aus einem linearen, einem quadratischen und einem Glied 3. Grades zusammen, wobei das Absolutglied keinen Einfluss auf den Verlauf der Bewegung hat.

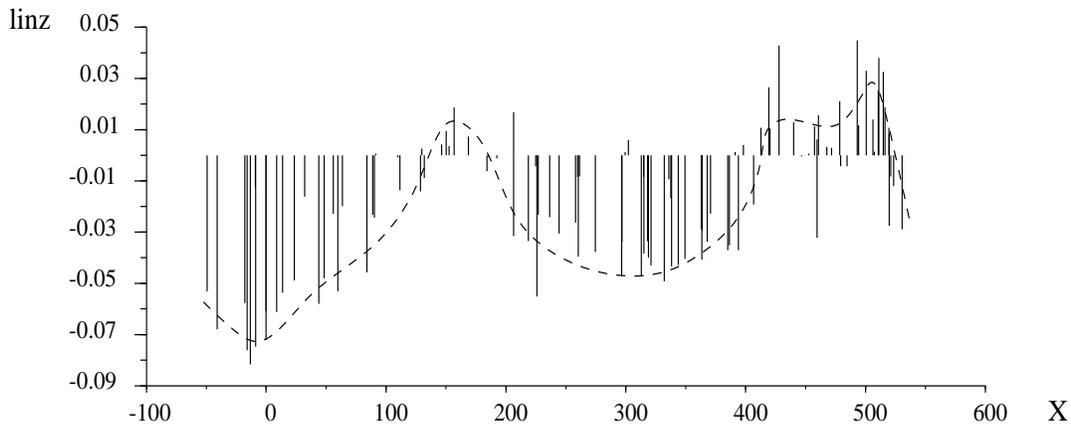
Der Verlauf der  $X$ -Koordinate der Punkte beschreibt eine leicht geschwungene Linie mit einem Wendepunkt nach etwa 12 Jahren. Dies deckt sich mit früheren Ausführungen in ZICK [78], wonach die Bewegungsraten anfangs relativ hoch sind, 1967 bereits zurückgehen und dann ab 1991 wieder zunehmen. Die Form der Kurve, welche die  $Y$ -Koordinate beschreibt, ist von der Lage des Punktes auf dem Gletscher abhängig, sodass sich hier kein so einheitliches Bild wie im Falle der  $X$ -Koordinate ergibt. Der Gletscher als Ganzes bewegt sich nicht geradlinig hangabwärts, sondern in einem leichten Bogen nach rechts. Dies hat zur Folge, dass sich Punkte am oberen Ende des Gletschers tendenziell in positiver, Punkte an der Gletscherstirn eher in negativer  $Y$ -Richtung bewegen. Außerdem tendieren Punkte, die nicht im Stromstrich liegen, nach außen zu den seitlichen Gletscherrändern hin. Der Verlauf der  $Z$ -Koordinate ist ebenfalls von der Lage des Punktes abhängig. Aus diesem Grund wurden die Änderungen der Anteile der Bewegungsfunktionen in Abhängigkeit der Koordinaten näher betrachtet und in den Graphiken in Abbildung 4.7 dargestellt.



(a)



(b)



(c)

Abbildung 4.7: Lineare Bewegungskomponenten der Punkte in Abhängigkeit der  $X$ -Koordinate. Die gestrichelt eingezeichnete Linie entspricht ungefähr dem Verlauf des jeweiligen Profils der linearen Bewegungskomponente.

Abbildung 4.7a zeigt, dass der Wert für die lineare Komponente der Bewegungsfunktion der  $X$ -Koordinate mit zunehmendem  $X$ -Wert steigt. Die gestrichelte Linie stellt den Verlauf der Komponente in Abhängigkeit der  $X$ -Koordinate genähert dar. Bei einem  $X$ -Wert von etwa 300, bei dem die Bewegungsrate am größten ist, erreicht diese Kurve ein Maximum und fällt in Richtung zur Gletscherstirn wieder leicht ab. Die Kurve beschreibt eine leichte Wellenbewegung. Die  $X$ -Richtung ist diejenige, in welche sich die Punkte am stärksten bewegen. Darüber hinaus ist die lineare Komponente in der Bewegungsfunktion für diese Richtung dominant. Daher ist der Verlauf der obigen Kurve dem eines Geschwindigkeitsprofils in Abhängigkeit von  $X$ , bei konstantem  $Y$ , in etwa ähnlich. Durch die Abbildung 4.8 wird dies bestätigt. Dort sind die Beträge der Geschwindigkeiten abgebildet. Die Werte hierfür wurden aus den dreidimensionalen Geschwindigkeitsvektoren berechnet, die wiederum aus den 1. Ableitungen der Bewegungsfunktionen (Gleichungen 4.4-1 bis 4.4-3) ermittelt wurden.

Auffallend in der Graphik 4.7a ist, dass zwischen den höheren Werten, die eindeutig eine Tendenz aufweisen, die in etwa der gestrichelten Linie folgt, auch Werte auftreten, die zum Teil sehr viel kleiner sind. Diese stammen von Punkten, die näher am Rand des Gletschers liegen, wo sich die rutschende Masse wesentlich langsamer bewegt als im Stromstrich. Daher gibt es Punkte mit ähnlichen  $X$ -Werten, die sich in ihren Bewegungskomponenten aufgrund ihrer Lage jedoch stark unterscheiden. Die Abbildung A.3a im Anhang, in der die Bewegungskomponenten in Abhängigkeit der  $Y$ -Koordinate dargestellt sind, zeigt die Zunahme der Werte für die Komponenten vom einen Rand zur Gletscherachse sowie deren Abnahme zum anderen Rand des Gletschers hin.

Die Abbildung 4.7b zeigt die lineare Komponente der Bewegungsfunktion der  $Y$ -Koordinate. Es ist zu erkennen, dass die Werte mit zunehmendem  $X$ -Wert kleiner und ab einem  $X$ -Wert von etwa 300 negativ werden. Dies spiegelt die Krümmung der Achse des Gletschers wider, der bei seiner Bewegung hangabwärts eine leichte Rechtskurve beschreibt. Auffallend in dieser Graphik sind die relativ hohen, positiven Werte einiger Punkte mit  $X$ -Koordinatenwerten zwischen 200 und 350. Es handelt sich hier um die Punkte 103, 106, 107, 108 und 109. Diese liegen am orographisch linken Rand des Gletschers (Abbildung 4.4) und bewegen sich weiter in positiver  $Y$ -Richtung. Die lineare Komponente der Bewegungsfunktion der  $Y$ -Koordinate in Abhängigkeit der  $Y$ -Koordinate wird in Abbildung A.3b im Anhang dargestellt. Hier ergeben sich die größten negativen Werte bei  $Y$ -Werten zwischen -40 und 30, also in etwa im Stromstrich. Diese Werte gehören zu Punkten am unteren Ende des Gletschers, die nach rechts wegdriften und insgesamt eine hohe Bewegungsrate aufweisen.

Betrachtet man den Verlauf der linearen Komponente der  $Z$ -Koordinate in Abhängigkeit von  $X$ , dargestellt in Abbildung 4.7c, so ist hier die Hebung bzw. die Absenkung der Gletscheroberfläche in den verschiedenen Bereichen des Gletschers zu erkennen. Zur Interpretation dieser Graphik ist es sinnvoll, die Abbildung 4.8 heranzuziehen. Dort sind die Beträge der Verschiebungsgeschwindigkeiten der Punkte in der  $X - Y$ -Ebene dargestellt. Durch die gestrichelt eingezeichnete Linie wird der Verlauf des Geschwindigkeitsprofils angedeutet. Der Verlauf dieses Profils ist dem der linearen Bewegungskomponente in  $Z$ -Richtung gegenläufig. Am oberen Ende des Gletschers senken sich die Punkte bei einer Bewegungsrate von etwa 8–10 cm pro Jahr ab. Beginnend bei einer  $X$ -Koordinate von etwa 140 heben sich die Punkte leicht an. Die Kurve des Geschwindigkeitsprofils zeigt hier ein Minimum, die weiter oben gelegenen Punkte sind also schneller und verursachen hier eine Hebung. Weiter hangabwärts folgt ein Bereich zwischen  $X$ -Werten von 200 und 300, in dem die Geschwindigkeiten der Verschiebungen stark zunehmen und sich die Punkte auch wieder absenken. Zur Gletscherstirn hin, wo die Geschwindigkeiten wieder abnehmen, erfolgt wiederum eine Hebung des rutschenden Materials.

In diesen Überlegungen wurden nur die linearen Komponenten der Bewegungsfunktionen betrachtet. Abbildung 4.6 zeigt, dass diese Komponenten zumindest für die Bewegung in  $X$ - und  $Y$ -Richtung dominant sind. Die Komponenten 2. und 3. Grades lenken den Verlauf der Bewegungskurve nur leicht nach oben oder unten ab. Die Aussagen, die aufgrund der graphischen Darstellungen gemacht wurden, ändern sich daher durch die Hinzunahme der Komponenten 2. und 3. Grades nicht. Bei der Bewegungsfunktion in  $Z$ -Richtung ist die lineare Bewegungskomponente zumindest bei einigen Punkten offensichtlich weniger dominant (Abbildung 4.6f). In diesem Falle ist es sicherlich angebracht, die  $Z$ -Komponenten der Verschiebungsvektoren  $\vec{u}(t)$  der Punkte zu betrachten und nicht nur die linearen Komponenten der Verschiebungsfunktionen. Diese Verschiebungen, berechnet für  $t = 32$ , also von 1965 - 1997, sind in der Abbildung 4.9 dargestellt. Die Linie, die den Verlauf des Verschiebungsprofils in  $Z$ -Richtung (gestrichelte Linie) andeutet, ist dem Verlauf der linearen Komponente der Bewegungsfunktion in  $Z$ -Richtung sehr ähnlich. Beide Kurven erreichen ihre Minima bzw. Maxima an denselben Stellen und somit werden die oben angeführten Überlegungen und Schlussfolgerungen durch die Abbildung 4.9 bestätigt.

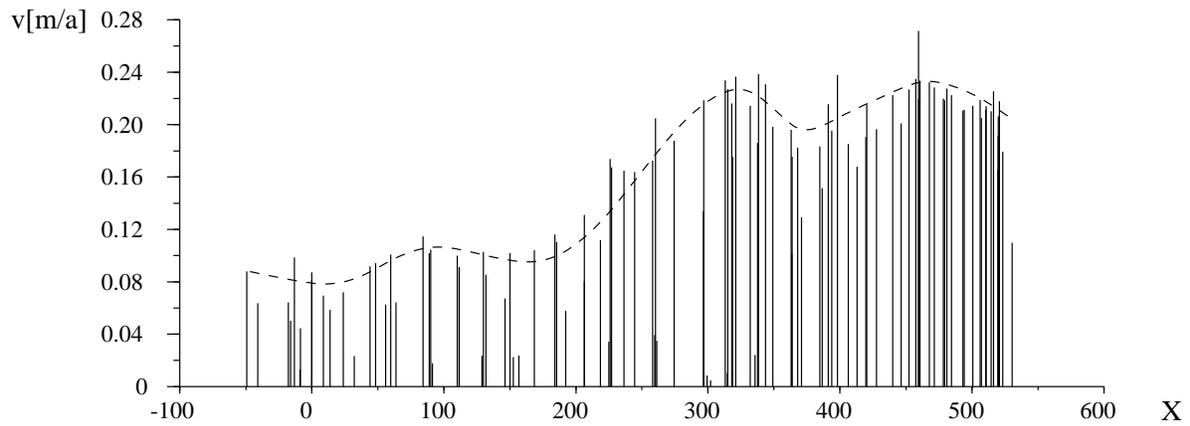


Abbildung 4.8: Geschwindigkeiten der Punkte im Jahr 1989 in Abhängigkeit der  $X$ -Koordinate. Die gestrichelt eingezeichnete Linie entspricht ungefähr dem Verlauf des Geschwindigkeitsprofils in  $Z$ -Richtung.

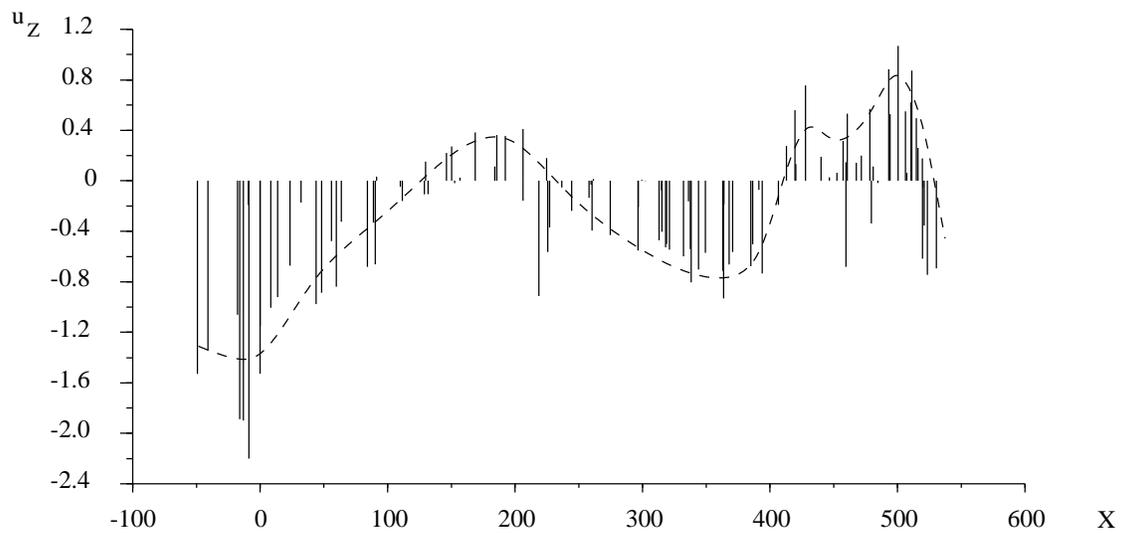
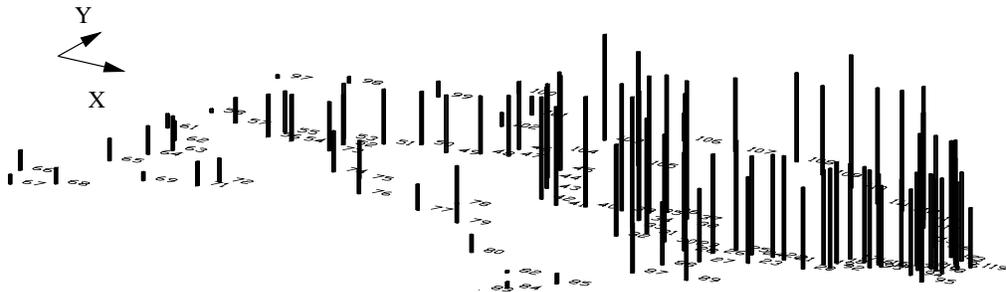
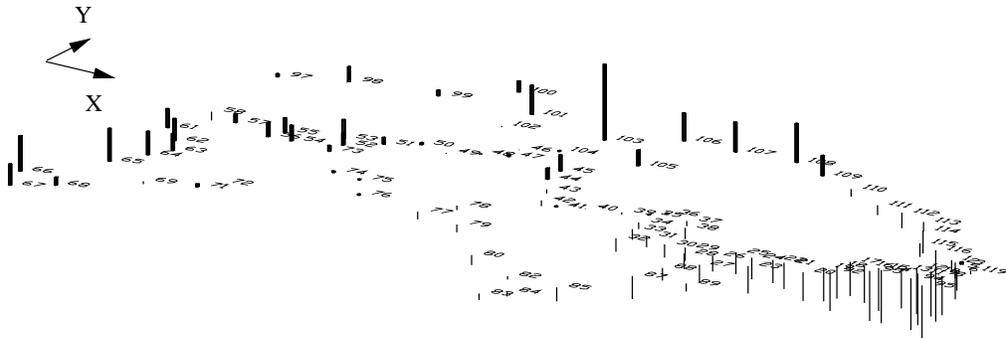


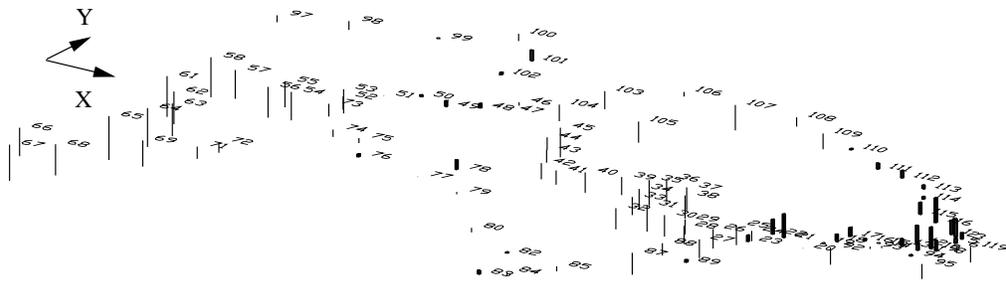
Abbildung 4.9: Verschiebungen der Punkte in  $Z$ -Richtung in Abhängigkeit der  $X$ -Koordinate. Die gestrichelt eingezeichnete Linie entspricht ungefähr dem Verlauf des Verschiebungsprofils in  $Z$ -Richtung.



(a)



(b)



(c)

Abbildung 4.10: Lineare Bewegungskomponenten in  $X$ -Richtung (a), in  $Y$ -Richtung (b) und in  $Z$ -Richtung (c) der Punkte in Abhängigkeit der Lage. Die positiven Werte sind fett eingezeichnet, die negativen dünn.

In Abbildung 4.10 sind die linearen Bewegungskomponenten in Abhängigkeit von  $X$  und  $Y$  dargestellt. Die Punkte sind lagerichtig kartiert, die Werte der Bewegungskomponenten sind 500-fach überhöht dargestellt. Dicke Balken bedeuten positives, dünne dagegen negatives Vorzeichen. Graphik 4.10a zeigt, dass die linearen Komponenten  $b_1$  aus Gleichung 4.4-1 mit zunehmendem  $X$ -Wert größer werden, zur Gletscherstirn hin jedoch wieder etwas abfallen. Darüber hinaus ist zu erkennen, dass die Werte für  $b_1$  bei Punkten, die am Rand des Gletschers liegen, wesentlich kleiner sind. Graphik 4.10b spiegelt die Bewegung des Gletschers entlang einer Rechtskurve wider. Im oberen, orographisch linken Bereich des Gletschers sind die linearen Komponenten  $c_1$  aus Gleichung 4.4-2 positiv, im unteren, rechten Bereich negativ.

In der Graphik 4.10c ist die lineare Komponente der Verschiebung in  $Z$ -Richtung in Abhängigkeit von  $X$  und  $Y$  zu sehen. Der Bereich zwischen den Punkten 47 und 52 zeigt eine leichte Anhebung. Oberhalb und unterhalb dieses Bereichs senken sich die Punkte ab. An der Gletscherstirn wird das Material wieder stärker aufgeschoben, was die höheren Zahlenwerte andeuten. Die negativen Werte ganz unten zeigen das Abrutschen der Punkte der Gletscherfront.

Im Anhang finden sich weitere Abbildungen der Komponenten der Bewegungsfunktionen in Abhängigkeit der Koordinaten. Diese Abbildungen zeigen, dass die Komponenten 2. und 3. Grades gegenläufig sind und sich in einer Größenordnung von 1 - 2 Zehnerpotenzen unterscheiden. Der Verlauf der Komponente 1. Grades ist dem der Komponente 3. Grades sehr ähnlich, jedoch nicht der Betrag. Der Verlauf der Komponente 2. Grades erscheint im Vergleich zu den beiden anderen an der Abszissen-Achse gespiegelt.

#### 4.4.2 Interpolation der Koeffizienten der Zeitfunktion

In diesem Abschnitt werden die Koeffizienten  $b_i$ ,  $c_i$  und  $d_i$  aus den Gleichungen 4.4-1 bis 4.4-3 flächenhaft interpoliert. Die Datenpunkte für die Interpolation sind in Form von konkreten Zahlenwerten für die  $b_i$ ,  $c_i$  und  $d_i$  an den Stellen  $X, Y$  gegeben. Da sich diese Zahlenwerte als Erhebungen über der  $X - Y$ -Ebene interpretieren lassen, kann die Interpolation wiederum als Ermittlung einer ausgleichenden Fläche über der  $X - Y$ -Ebene durch die Datenpunkte erfolgen. Die Komplexität der Flächen, die für die Interpolationen in Betracht kommen, hängt von der Anzahl der Datenpunkte, ihrer Verteilung und ihrer Homogenität ab. Für vorliegendes Beispiel wurden bivariate Polynome 3. Grades mit Monomen als Basisfunktionen verwendet (LANCASTER UND SALKAUSKAS [49]). Für eine Fläche  $F = f(X, Y)$  ergibt sich

$$f(X, Y) = e_0 + e_1X + e_2Y + e_3X^2 + e_4XY + e_5Y^2 + e_6X^3 + e_7X^2Y + e_8XY^2 + e_9Y^3 \quad (4.4-4)$$

mit den Unbekannten  $e_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 9$ ).

Wie bei der Interpolation der Zeitfunktionen sollte auch hier der Grad der interpolierenden Flächen nicht beliebig hoch gesetzt werden, auch wenn die Anzahl der vorhandenen Datenpunkte dies im vorliegenden Fall ermöglichen würde.

Die Verteilung der Datenpunkte über dem gesamten Gletscher ist jedoch nicht homogen. Die Punktdichte an den Rändern ist im Vergleich zur Gletschermitte wesentlich geringer (Abbildung 4.4). Gerade an den Rändern eines Gletschers kann es zu Bewegungen kommen, die durch die lokale Topographie verursacht werden und die daher das Bewegungsverhalten der gesamten Gletschermasse nur bedingt repräsentieren. Dies trifft für Punkte auf Gesteinsblöcken zu, die beispielsweise am steilen Rand des Gletschers zwischen zwei Epochen abrutschen. Das Datenmaterial sollte hinsichtlich solcher Bewegungen vorab bereinigt werden, was jedoch nicht immer exakt möglich ist. So können Punkte verbleiben, die bei der Interpolation mit Flächen höheren Grades auch wegen fehlender, korrigierend wirkender Nachbarpunkte eine zum Teil extreme, unrealistische Aufbiegung der Ränder der Flächen verursachen.

Diese Aufbiegungseffekte machen sich im Fall der flächenhaften Interpolation wesentlich stärker bemerkbar als bei den Zeitfunktionen, da die Flächenparameter  $X$  und  $Y$  wesentlich größere Zahlenwerte annehmen als der Kurvenparameter  $t$  bei den Zeitfunktionen. Der maximale Wert für  $t$  war  $t = 32$ , während sich die  $Y$ -Werte zwischen -170 und 190 bewegen und die  $X$ -Koordinate Werte von über 500 erreicht. Diese Werte, zur 3. Potenz erhoben, haben große Fehler bei kleinen Änderungen des zugehörigen Koeffizienten zur Folge.

Durch die Beschränkung auf Grad drei ist es allerdings nicht mehr möglich, alle in der Realität vorhandenen Hebungen und Senkungen der Flächen zu modellieren, was die Folge haben kann, dass zwei räumlich nah beieinander liegende Maxima durch die interpolierende Fläche zu einem gemeinsamen Maximum verschmelzen. Lokale Änderungen im Deformationsverhalten werden nicht erfasst, während das globale Deformationsverhalten gut modelliert wird.

Die zu interpolierenden Daten sind in Abschnitt 4.4.1 und im Anhang A graphisch dargestellt. Die Abbildung 4.7a zeigt bereits, dass der Verlauf der linearen Komponente der Bewegung in  $X$ -Richtung entlang eines Profils mit konstantem  $Y$  mehr „Wellen“ aufweist, als durch eine Fläche dritten Grades modelliert werden können. Die ausgleichende Fläche wird im Bereich von  $X$ -Werten zwischen -50 und 250, also im oberen Teil des Gletschers, eine glättende Wirkung ausüben, das bei einem  $X$ -Wert von ungefähr 310 auftretende Maximum recht gut approximieren und die Krümmung der in der gestrichelten Linie in der Graphik wieder etwas abschwächen. Es werden also lokale Einzelheiten durch die ausgleichende Fläche mit Sicherheit nicht erfassbar und darstellbar sein.

Bei der linearen Bewegungskomponente in  $Y$ -Richtung (Abbildung 4.7b) scheint eine gute Approximation durch die Fläche 3. Grades durchaus möglich. Zwischen  $X$ -Werten von 200 und 350 befinden sich einige Punkte mit auffallend hohen Werten. Hierbei handelt es sich um die Punkte 103, 106, 107, 108 und 109 am orographisch linken Rand des Gletschers mit relativ hohen  $Y$ -Werten, deren auffälliges Bewegungsverhalten im vorhergehenden Abschnitt bereits angesprochen wurde. Abgesehen von diesem Teilabschnitt scheint die lineare Bewegungskomponente mit zunehmendem  $X$  stetig abzunehmen. Problematischer stellt sich die Interpolation der linearen Bewegungskomponente in  $Z$ -Richtung dar. Die Abbildung 4.7c zeigt im Verlauf dieser Komponente in Abhängigkeit der  $X$ -Koordinate, der wiederum als gestrichelte Linie angedeutet ist, zwei stark ausgeprägte Minima bei den  $X$ -Werten 0 bzw. 300 sowie zwei stark ausgeprägte Maxima bei den  $X$ -Werten 150 und 500. Die Interpolation durch eine Fläche 3. Grades führt hier sicherlich zu Informationsverlusten. Die Bewegung in  $Z$ -Richtung, die auf der Basis der in dieser Beispielrechnung durchgeführten Interpolation berechnet werden kann, wird zwar den globalen Charakter der Bewegung richtig wiedergeben, wohingegen Änderungen der Bewegungen in kleinräumigen Bereichen nicht erfasst werden.

#### 4.4.3 Ergebnisse der Interpolationen

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse aus den flächenhaften Interpolationen der Koeffizienten der Zeitfunktionen dargestellt und diskutiert. Zusätzlich zu den Flächen durch diese Koeffizienten wurde eine ausgleichende Fläche durch die  $Z$ -Koordinaten der Datenpunkte berechnet, welche die Topographie der Gletscheroberfläche widerspiegelt. Das Ergebnis der Berechnung ist in Abbildung 4.11 dargestellt.

Der Vergleich dieser interpolierenden Fläche mit den Höhenlinien aus der Kartierung in Abbildung 4.4 zeigt eine gute globale Übereinstimmung. Für die Berechnung von Deformationsmaßen ist diese Fläche irrelevant, da sie nicht von der Zeit  $t$  abhängt. Sie dient lediglich dazu, die genäherte Form des untersuchten Objekts darzustellen.

Mit Hilfe der interpolierten Koeffizienten der Zeitfunktionen lässt sich nun der Ortsvektor  $\bar{x}$  für jeden beliebigen materiellen Punkt des Kontinuums in Abhängigkeit der Koordinaten  $X$  und  $Y$  sowie der Zeit  $t$  ausdrücken. Es ist also  $\bar{x} = \bar{x}(X, Y, t)$ . An dieser Stelle sei nochmals auf den Unterschied zwischen materiellen und räumlichen Koordinaten hingewiesen (Kapitel 2). Für die materiellen Koordinaten werden die Buchstaben  $X, Y, Z$  verwendet, für die räumlichen der Vektor  $\bar{x}$  mit den Komponenten  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Für die Berechnung der ausgleichenden Flächen wurden bivariate Polynome 3. Grades (Abschnitt 3.3.1) verwendet. Für die Komponenten  $x_i$  des Ortsvektors ergibt sich damit die Form

$$x_i = x_{i_0} + \bar{b}_i \bar{p}^T t + \bar{c}_i \bar{p}^T t^2 + \bar{d}_i \bar{p}^T t^3 \quad (4.4-5)$$

mit  $x_{1_0} = X$ ,  $x_{2_0} = Y$ ,  $x_{3_0} = Z$

$$\begin{aligned} \bar{b}_i &= ( b_{0_i} \ b_{1_i} \ b_{2_i} \ b_{3_i} \ b_{4_i} \ b_{5_i} \ b_{6_i} \ b_{7_i} \ b_{8_i} \ b_{9_i} ), \\ \bar{c}_i &= ( c_{0_i} \ c_{1_i} \ c_{2_i} \ c_{3_i} \ c_{4_i} \ c_{5_i} \ c_{6_i} \ c_{7_i} \ c_{8_i} \ c_{9_i} ), \\ \bar{d}_i &= ( d_{0_i} \ d_{1_i} \ d_{2_i} \ d_{3_i} \ d_{4_i} \ d_{5_i} \ d_{6_i} \ d_{7_i} \ d_{8_i} \ d_{9_i} ), \\ \bar{p} &= ( 1 \ X \ Y \ X^2 \ XY \ Y^2 \ X^3 \ X^2Y \ XY^2 \ Y^3 ). \end{aligned}$$

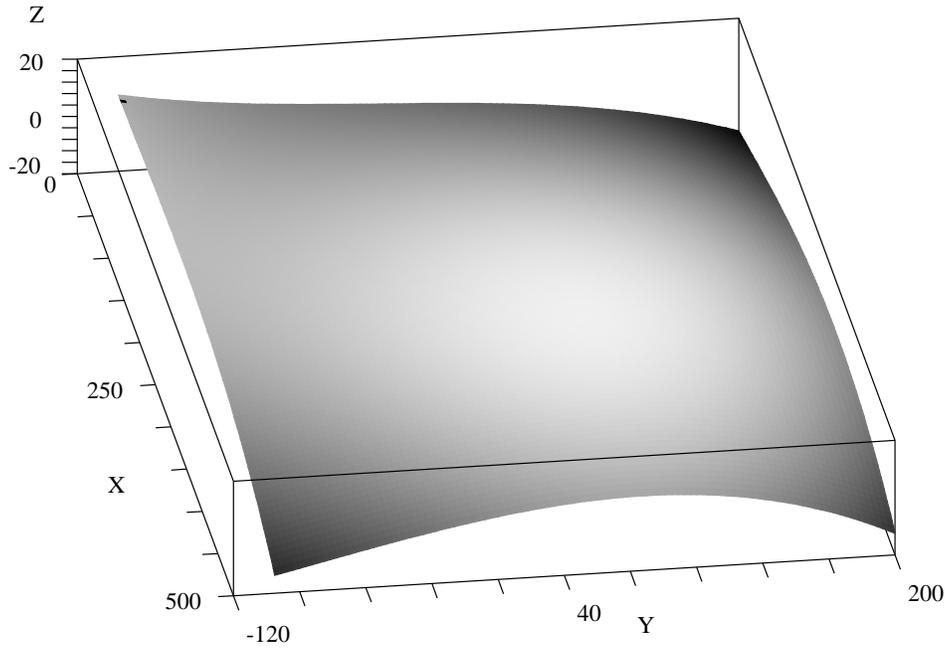


Abbildung 4.11: Interpolierende Fläche durch die  $Z$ -Werte der Datenpunkte.

Die Komponenten des Verschiebungs-, des Geschwindigkeits- und des Beschleunigungsvektors berechnen sich nach

$$u_i = \bar{b}_i \bar{p}^T t + \bar{c}_i \bar{p}^T t^2 + \bar{d}_i \bar{p}^T t^3, \quad (4.4-6)$$

$$v_i = \bar{b}_i \bar{p}^T + 2 \bar{c}_i \bar{p}^T t + 3 \bar{d}_i \bar{p}^T t^2 \quad \text{und} \quad (4.4-7)$$

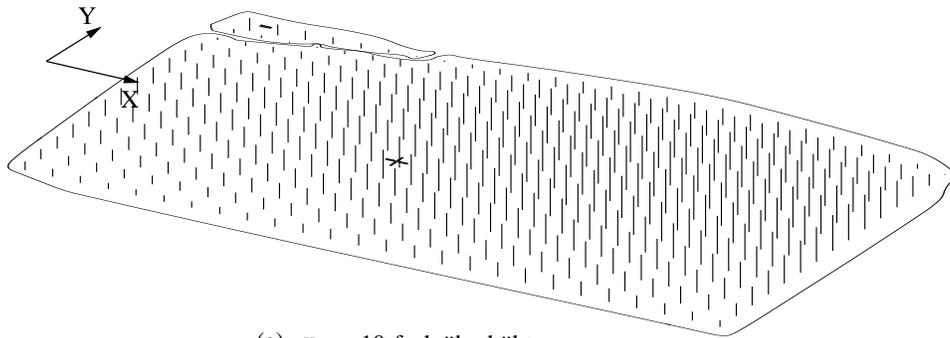
$$a_i = 2 \bar{c}_i \bar{p}^T + 6 \bar{d}_i \bar{p}^T t. \quad (4.4-8)$$

Für das Jahr 1987 ( $t = 22$ ) wurden die Verschiebungen berechnet und in Abbildung 4.12 komponentenweise in Abhängigkeit der Koordinaten  $X$  und  $Y$  dargestellt. Wegen der unterschiedlichen Größenordnungen der Verschiebungen in den einzelnen Achsrichtungen wurden die Komponenten für die graphische Darstellung mit unterschiedlichen Faktoren versehen ( $u_1 \cdot 10$ ,  $u_2 \cdot 50$  und  $u_3 \cdot 100$ ). Die Darstellungen der Komponenten des Geschwindigkeits- und des Beschleunigungsvektors befinden sich im Anhang. Abbildung 4.13 zeigt die Verschiebungen als kontinuierliche Flächen dargestellt.

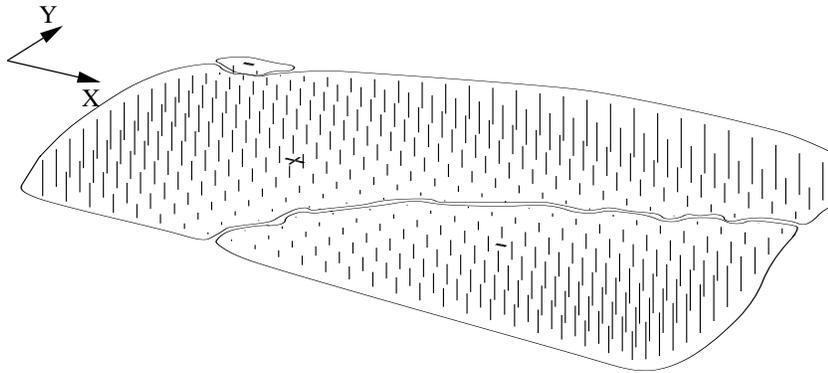
Zur Beurteilung der Güte der Interpolationen werden im Folgenden die Abweichungen der aus Messungen abgeleiteten Koordinaten von den aus Gleichung 4.4-5 berechneten dargestellt.

Die Abweichungen der interpolierten von den direkt aus Messungen abgeleiteten Koordinaten im Jahr 1977 sind in der Abbildung 4.14 mit 50-facher Überhöhung dargestellt, und zwar in Abbildung 4.14a die der  $x_1$ -Koordinaten, in Abbildung 4.14b die der  $x_2$ -Koordinaten und in Abbildung 4.14c die der  $x_3$ -Koordinaten. Dicke Balken stehen dabei für positives, dünne für negatives Vorzeichen. Bei Ersterem ist der aus Messungen ermittelte Wert größer als der interpolierte, bei negativem Vorzeichen kleiner. Sämtliche Punkte mit großen Koordinatendifferenzen liegen am Rand des Gletschers. Diese Tatsache war aufgrund der Modellbildung voraussehbar.

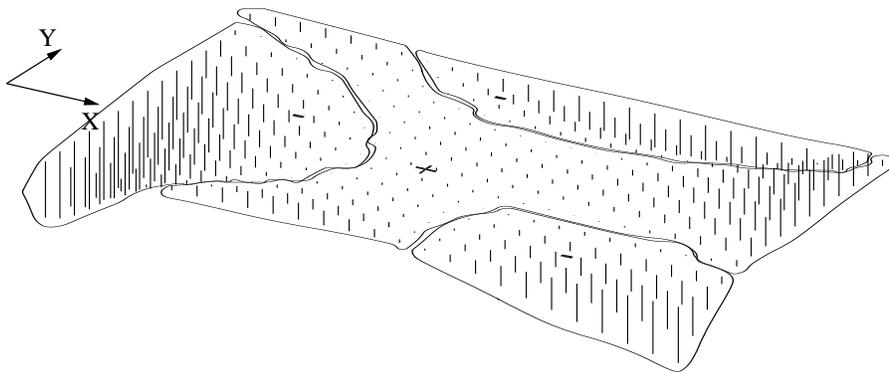
Desweiteren ist eine gewisse Systematik in der Verteilung von Bereichen mit Abweichungen gleichen Vorzeichens zu verzeichnen. Wie in Abbildung 4.14a zu erkennen ist, haben sich die Punkte mit der größten Verschiebungsgeschwindigkeit in der Mitte des Gletschers (Punkte 28 - 45) tatsächlich weiter bewegt, Punkte in langsameren Bereichen haben sich weniger weit hangabwärts bewegt als über die Interpolation berechnet. Die Interpolation wirkt hier also ausgleichend, was in Anbetracht der verwendeten Flächen zu erwarten war, da der Verlauf der Koeffizienten der Zeitfunktionen (Abbildung 4.7) mehr Oszillationen aufweist als durch eine Fläche 3. Grades modelliert werden können.



(a)  $u_1$  10-fach überhöht



(b)  $u_2$  50-fach überhöht



(c)  $u_3$  100-fach überhöht

Abbildung 4.12: Komponenten des Verschiebungsvektors  $\bar{u}$  für  $t = 22$  (1987).

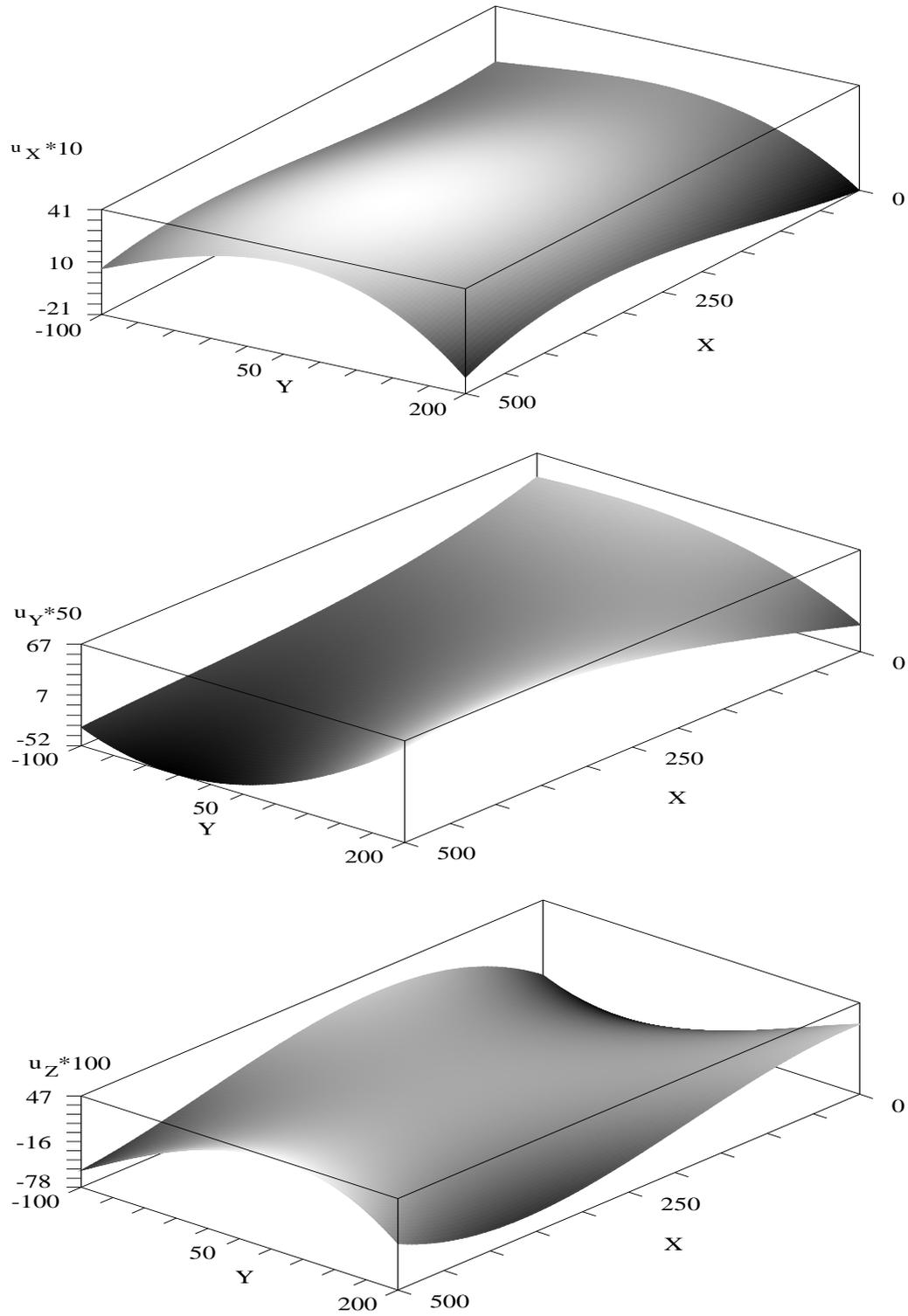
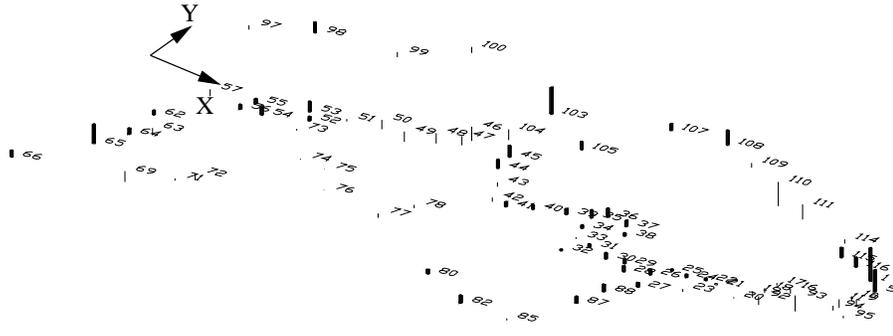


Abbildung 4.13: Komponenten des Verschiebungsvektors  $\bar{u}$  für  $t = 22$ , kontinuierlich als Flächen dargestellt.



(a)



(b)



(c)

Abbildung 4.14: Differenz zwischen aus Messungen abgeleiteten und berechneten  $x_1$ -,  $x_2$ - und  $x_3$ -Koordinaten im Jahr 1977. Dicke Balken haben positives Vorzeichen, dünne negatives.

Die interpolierten Lagen der Punkte 46-49, direkt oberhalb des „schnellen“ Bereiches der Punkte 28-45, weisen relativ hohe negative Abweichungen von der Solllage auf (Tabelle 4.4). In Abbildung 4.7a erkennt man im Verlauf der linearen Komponente der Bewegung in  $X$ -Richtung einen flachen Bereich bei  $X$ -Werten zwischen 100 und 200, an den sich ein steiler Anstieg bis zu einem  $X$ -Wert von etwa 300 anschließt. Die ausgleichende Fläche liegt in diesem flachen Bereich sicher ein Stück oberhalb des tatsächlichen Verlaufs, wodurch die relativ großen Abweichungen zu erklären sind. Die größten Werte der Bewegungskomponente, die bei  $X$ -Koordinaten um 300 auftreten, werden durch die Fläche etwas abgeschnitten, die im Bereich von  $X$ -Werten um 400 wieder oberhalb der tatsächlichen Werte verläuft. Die daraus resultierenden negativen Abweichungen sind kleiner als oben, was plausibel erscheint, wenn man dieses Ergebnis mit der Abbildung 4.7a vergleicht. Relativ große Abweichungen bei einzelnen Punkten, wie z. B. bei Punkt 14 im vorderen Bereich des Gletschers, können durch Einzelpunktverschiebung, also unabhängig von der gesamten Gletschermasse, erklärt werden. Die Gesteinsblöcke, auf denen die Punkte vermarktet sind, können kippen oder gerade in den Randbereichen auch abrutschen.

Nach Abbildung 4.14b zeigen die Abweichungen der interpolierten  $x_2$ -Werte von den aus Messungen berechneten ein ähnliches Verhalten wie bei den interpolierten  $x_1$ -Werten. Auch hier sind Bereiche mit gleichem Vorzeichen in den Abweichungen vorhanden, in denen die interpolierenden Flächen größer „gemessene“ Werte etwas verkleinern und umgekehrt. Auffallend ist ein kleiner Bereich an der Gletscherzunge. Die Punkte 1-6 haben sich um einiges weiter in  $Y$ -Richtung bewegt, als durch die Interpolation berechnet. Diese Punkte liegen in einem Bereich, in dem die Gletscherzunge stark nach links, also in positive  $Y$ -Richtung, abfällt. Der Einfluss dieser Bewegung auf die Ergebnisse der Interpolationen bewirkt, dass die berechneten  $x_2$ -Werte der benachbarten Punkte zur Gletschermittle hin größer als die real vorhandenen werden. Generell sind auch hier die größten Abweichungen am Rand des Gletschers zu finden.

Zur Interpretation der Abbildung 4.14c ist es hilfreich, die Abbildung 4.7c hinzuzunehmen, in der der ungefähre Verlauf der linearen Bewegungskomponente in  $Z$ -Richtung in Abhängigkeit der  $X$ -Koordinate als gestrichelte Linie eingezeichnet ist.

Stellt man sich die Durchstoßpunkte dieser Linie durch diejenige Fläche vor, welche die Werte für diese Bewegungskomponente interpoliert, so werden diese bei  $X$ -Werten von etwa 100, 200, 400 und etwas über 500 liegen. Die in Abbildung 4.7c eingezeichnete Kurve verläuft bis zu einem  $X$ -Wert von etwa 100 unterhalb der interpolierenden Fläche, dann bis zu einem  $X$ -Wert von 200 oberhalb derselben usw. Genau dort, wo man diese Durchstoßpunkte vermutet, wechselt auch das Vorzeichen in den Abweichungen aus Abbildung 4.14c, was durch die Werte, die in Tabelle 4.4 für einige ausgewählte Punkte dargestellt sind, belegt wird. Das Ergebnis stimmt also mit den in Abschnitt 4.4.2 getroffenen Aussagen, dass die ausgleichenden Flächen glättende Wirkung auf die Bewegungen ausüben, überein.

Die in Abbildung 4.14 dargestellten Ergebnisse werden für ausgewählte Punkte in Tabelle 4.4 als konkrete Zahlenwerte ausgewiesen.

Punkt 2 liegt auf dem linken Teil der Gletscherzunge, in einem Bereich, dessen Abrutschen in die positive  $Y$ -Richtung durch das Modell nicht sehr gut erfasst wird, was die relativ großen Werte bei  $\Delta x_2$  erklärt. Punkt 14 fällt durch den großen  $\Delta x_1$ -Wert, besonders im Vergleich zu seinen Nachbarn, auf. Möglicherweise ist dieser Punkt zu einem nicht bekannten Zeitpunkt abgerutscht. Die Epochenkoordinaten zeigen, dass sich die Geschwindigkeit der Verschiebung dieses Punktes in  $X$ -Richtung seit der Epoche 1991 fast verdoppelt hat, während sie in  $Y$ -Richtung eher konstant blieb. Die Änderung in der  $x_3$ -Koordinate ist nicht sehr groß (1-3 cm pro Jahr) und wird durch die Interpolation sehr gut angenähert.

Die Punkte mit den Nummern 5-62 in der Tabelle liegen in etwa im Stromstrich. Mit steigender Punktnummer nehmen die Werte für die  $X$ -Koordinaten ab. In den Vorzeichen der Abweichungen ist auch hier eine Systematik zu verzeichnen. Von der Gletscherstirn bis zu einem  $X$ -Wert von etwa 400 (bei Punkt 22) sind die Vorzeichen der  $\Delta x_1$  bei den meisten Punkten negativ. Von da bis zum Punkt 45 ( $X$ -Wert etwa 225) liegt die Zone, in der die höchsten Bewegungsraten gemessen wurden. Nach oben schließt sich ein Bereich an, in dem die bereits erwähnten hohen negativen Abweichungen in den  $\Delta x_1$  auftreten. Vom Punkt 50 hangaufwärts bis zum Punkt 62 liegen die Abweichungen im Dezimeterbereich mit wechselnden Vorzeichen.

Die Punkte mit den Nummern 74-116 in den Randbereichen des Gletschers weisen durchwegs negative Vorzeichen in den  $\Delta x_1$  und wechselnde Vorzeichen in den  $\Delta x_2$  und  $\Delta x_3$  auf. Zu den Vorzeichen der  $\Delta x_3$  ist zu

Punkt- nummer	Lage [m] ( $t = 0$ )		$\Delta$ 1977 [m] $t = 12$			$\Delta$ 1994 [m] $t = 29$		
	$x_1$	$x_2$	$\Delta x_1$	$\Delta x_2$	$\Delta x_3$	$\Delta x_1$	$\Delta x_2$	$\Delta x_3$
2	514.77	26.73	0.19	0.37	-0.00	0.20	0.98	-0.04
5	520.40	17.69	-0.25	0.26	-0.17	-0.20	0.60	-0.49
9	516.04	1.50	0.09	-0.15	0.01	0.33	-0.31	-0.06
14	484.90	-8.26	-0.61	-0.06	-0.00	-0.61	-0.40	-0.04
19	452.60	-20.86	-0.04	-0.11	0.16	0.22	-0.26	0.26
22	419.43	-22.94	-0.14	0.04	0.28	-0.39	0.14	0.65
25	393.92	-21.97	0.01	0.03	-0.11	-0.16	0.15	-0.39
30	349.27	-28.72	0.14	0.10	-0.08	0.28	0.17	-0.26
34	315.03	0.34	0.22	0.05	0.01	0.50	0.11	-0.14
38	343.85	4.60	0.15	0.05	-0.14	0.26	0.08	-0.45
40	274.58	7.65	0.05	0.06	-0.04	0.07	0.10	-0.21
43	236.51	28.03	-0.01	-0.07	0.10	-0.07	-0.09	0.15
45	225.66	62.75	0.03	0.18	-0.10	0.07	0.53	-0.31
47	185.29	71.71	-0.35	-0.14	0.16	-0.73	-0.26	0.41
48	168.70	67.42	-0.30	-0.17	0.22	-0.64	-0.30	0.43
50	129.73	65.77	-0.08	-0.15	0.14	-0.11	-0.29	0.27
51	109.92	55.69	0.05	-0.05	0.08	0.11	-0.10	0.15
56	43.84	34.25	0.13	0.07	-0.08	0.23	0.08	-0.26
62	0.00	0.00	-0.16	0.08	0.14	-0.28	0.07	0.15
74	111.55	-6.31	-0.03	-0.03	0.06	0.08	-0.17	0.08
77	192.36	-47.18	-0.43	-0.09	0.14	-0.97	-0.30	0.33
82	299.53	-127.56	-0.24	0.11	0.02	-0.60	0.21	0.05
95	519.76	-21.54	-0.10	-0.08	-0.30	-0.12	-0.17	-0.61
99	91.36	151.98	-0.16	-0.09	0.03	-0.40	-0.12	-0.01
107	296.52	145.99	-0.05	0.14	-0.09	-0.32	0.20	-0.13
109	363.75	132.13	-0.28	-0.05	0.04	-0.58	0.00	0.13
116	493.03	41.12	-0.18	0.08	0.10	-0.36	0.18	0.29

Tabelle 4.4: Abweichungen der interpolierten und der direkt aus den Messungen abgeleiteten Koordinaten in den Jahren 1977 und 1994.

bemerken, dass die positive  $Z$ -Achse näherungsweise senkrecht zur Hangoberfläche steht und nach oben orientiert ist. Punkte mit negativem  $\Delta x_3$ -Wert haben sich also in Wirklichkeit weniger weit nach oben bewegt als aus der Berechnung nach Gleichung 4.4-5 hervorgeht. Punkte, die an der Gletscherstirn nach unten abrutschen, besitzen daher relativ hohe negative  $\Delta x_3$ -Werte. Punkte oberhalb der Gletscherstirn weisen hohe positive Werte in  $\Delta x_3$ - auf, da sie durch den Druck der nachfolgenden Gletschermasse gehoben werden.

Die Abbildung 4.15 zeigt die Verschiebungen der Objektpunkte in Form von Vektorzügen, die aus den Epochenkoordinaten von 1977 - 1994 berechnet wurden.

Die Beträge der Abweichungen bewegen sich, abgesehen von einigen Zonen, in einer Spanne zwischen 10-20 cm, wobei die Differenzen in späteren Epochen etwas zunehmen, da die interpolierten Koeffizienten dann mit höheren Werten für  $t^n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) multipliziert werden.

Die Werte sind damit um eine Zehnerpotenz größer als die Genauigkeit der Koordinaten in den einzelnen Epochen. Durch die Verwendung von bivariaten Polynomen 3. Grades für die flächenhafte Interpolation wurde jedoch von vornherein in Kauf genommen, dass nicht alle Änderungen im Bewegungsverhalten der rutschenden Masse modelliert werden können. Die Realität wurde durch ein stark vereinfachendes Modell angenähert. Tatsächliche Punktbewegungen von bis zu 6 m in 30 Jahren wurden im Durchschnitt um 30 cm verfälscht, was einem Fehler von 5 % entspricht.

Tabelle 4.5 zeigt die durchschnittlichen Abweichungen der interpolierten Koordinaten aller Punkte von den aus Messungen abgeleiteten, berechnet für die Jahre 1977 und 1994.

$\Delta$ 1977 [m]			$\Delta$ 1994 [m]		
$\Delta x_1$	$\Delta x_2$	$\Delta x_3$	$\Delta x_1$	$\Delta x_2$	$\Delta x_3$
0.13	0.11	0.09	0.30	0.24	0.23

Tabelle 4.5: Durchschnittliche Abweichungen der interpolierten von den aus Messungen ermittelten Koordinaten in den Jahren 1977 und 1994.

### 4.5 Berechnung von Deformationsmaßen

Aus dem Verschiebungsvektorfeld  $u(X, Y, t)$ , das nun in Abhängigkeit des Ortes und der Zeit vorliegt, lassen sich nach Abschnitt 2.1.3 sämtliche für die Berechnung von Deformationsmaßen wichtigen Größen berechnen. Zunächst wird das Verschiebungsgradiententensorfeld  $\text{Grad } \bar{u}$  nach Gleichung 2.1-4 berechnet. Mit Gleichung 4.4-6 wird dieses zu

$$\text{Grad } \bar{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X} & \frac{\partial u_2}{\partial X} & \frac{\partial u_3}{\partial X} \\ \frac{\partial u_1}{\partial Y} & \frac{\partial u_2}{\partial Y} & \frac{\partial u_3}{\partial Y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial Z} & \frac{\partial u_2}{\partial Z} & \frac{\partial u_3}{\partial Z} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial X} &= (\bar{b}_i t + \bar{c}_i t^2 + \bar{d}_i t^3) \frac{\partial \bar{p}^T}{\partial X}, \\ \frac{\partial u_i}{\partial Y} &= (\bar{b}_i t + \bar{c}_i t^2 + \bar{d}_i t^3) \frac{\partial \bar{p}^T}{\partial Y}, \\ \frac{\partial u_i}{\partial Z} &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}^T}{\partial X} &= (0 \ 1 \ 0 \ 2X \ Y \ 0 \ 3X^2 \ 2XY \ Y^2 \ 0)^T, \\ \frac{\partial \bar{p}^T}{\partial y} &= (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ X \ 2Y \ 0 \ X^2 \ 2XY \ 3Y^2)^T. \end{aligned}$$

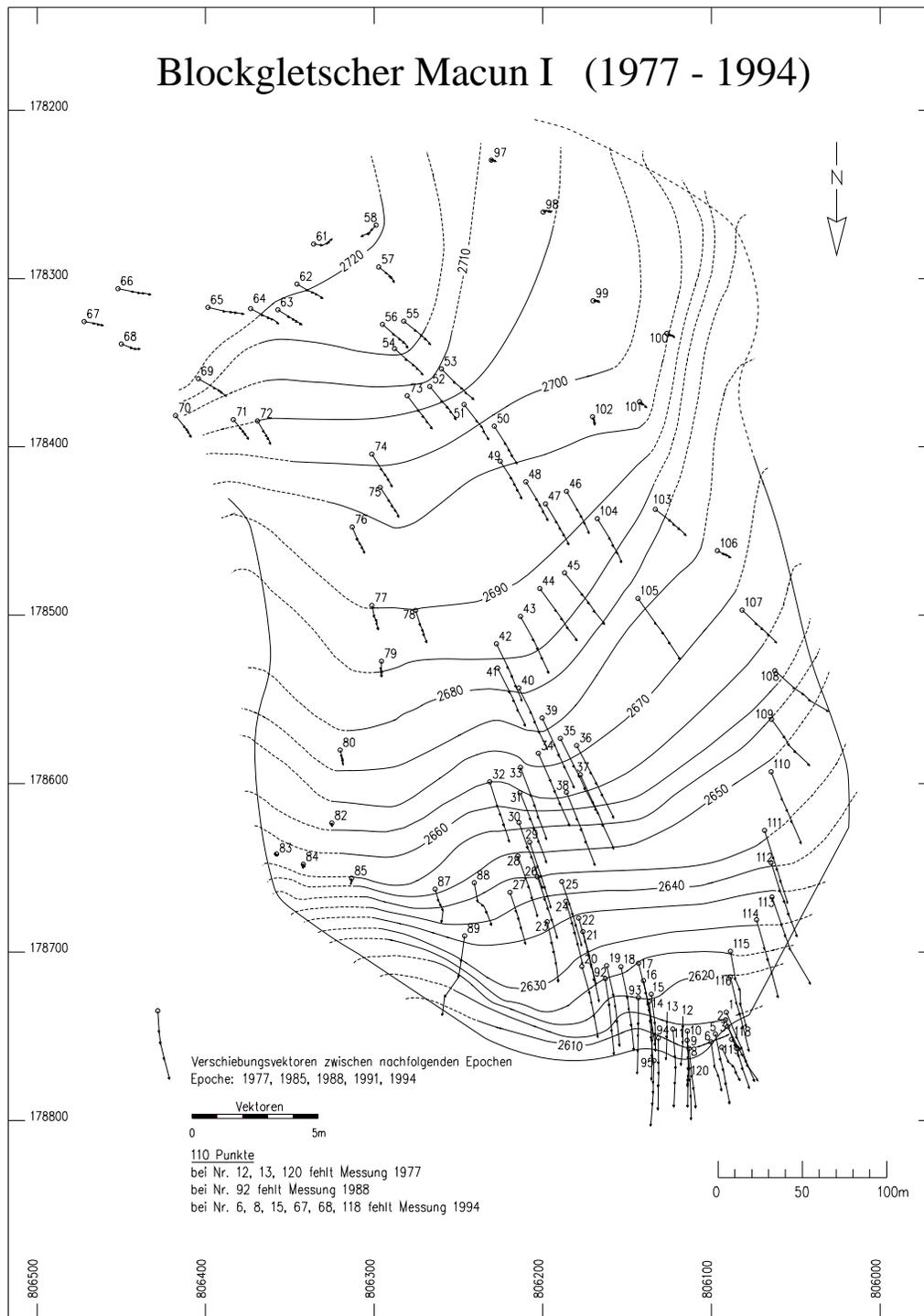


Abbildung 4.15: Verschiebungsvektorzüge für die Objektpunkte von 1977 - 1994, berechnet aus den Epochenkoordinaten (aus ZICK [78]).

Mit dem so ermittelten Verschiebungsgradiententensorfeld lassen sich nun der Deformationstensor  $\underline{E}$ , die Cauchy-Green-Tensoren  $\underline{C}$  und  $\underline{B}$ , der Drehtensor  $\underline{R}$ , der Greensche Verzerrungstensor  $\underline{E}$ , der infinitesimale Deformationstensor  $\underline{\varepsilon}$  und der infinitesimale Drehtensor  $\underline{\Omega}$  für jeden beliebigen Punkt des Kontinuums berechnen.

Mit Ausnahme des Drehtensors  $\underline{R}$  und des linken Cauchy-Green-Tensors wurden alle genannten Tensoren berechnet. Der Informationsgehalt des rechten Cauchy-Green-Tensors entspricht in etwa dem des Verzerrungstensors bzw. des infinitesimalen Deformationstensors. Aus diesem Grund wird in der Ergebnisdarstellung auf die Werte von  $\underline{C}$  nicht weiter eingegangen. Da die Änderungen in den Verschiebungen klein sind, liefern der Verzerrungstensor  $\underline{E}$  und der infinitesimale Deformationstensor  $\underline{\varepsilon}$  Ergebnisse, deren Unterschied vernachlässigbar gering ist. Die Anwendung der *linearen Theorie* der Kinematik des Kontinuums (Kapitel 2) ist demnach erlaubt. Die wichtigsten und interessantesten Ergebnisse bestehen sicherlich in Werten für Dehnungen und Drehungen. Diese können aus den oben genannten Tensoren extrahiert werden. Die Ergebnisse werden graphisch dargestellt, wobei sämtliche zugrunde liegenden Werte für das Jahr 1987, also  $t = 22$  Jahre nach der Nullepoche, berechnet wurden. Bei anderen Werten für  $t$  ergäben sich in erster Linie Änderungen in den Beträgen für die Deformationsmaße. Es verändert sich jedoch auch die Lage der Extremwerte sowie die der Übergänge von positiven Dehnungen bzw. Rotationen in negative.

Anmerkung: In den folgenden Ausführungen bedeutet links bzw. rechts immer in Fließrichtung (orographisch) links bzw. rechts. Die Fließrichtung stimmt näherungsweise mit der Richtung der positiven  $X$ -Achse überein.

#### 4.5.1 Dehnungen und Gleitungen

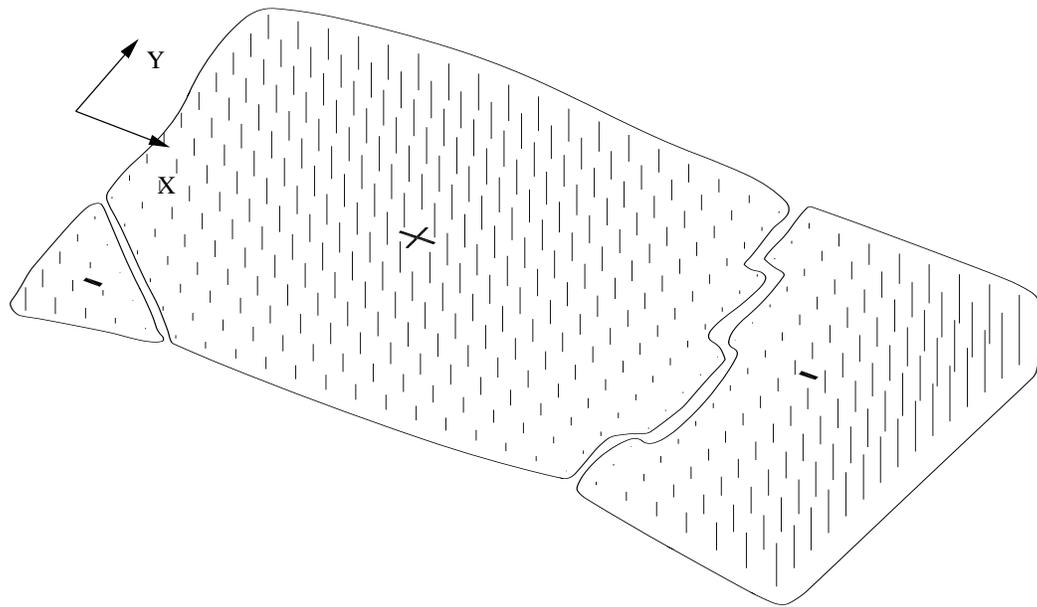
In Abbildung 4.16a und 4.16b sind die Dehnungen in  $X$ -Richtung ( $\underline{\varepsilon}_{11}$ ) sowie in  $Y$ -Richtung ( $\underline{\varepsilon}_{22}$ ) in Abhängigkeit der Koordinaten  $X$  und  $Y$  dargestellt. Die Dehnungen in  $Z$ -Richtung haben den Wert null. In den Bereichen, die mit einem „+“ gekennzeichnet sind, besitzen die Dehnungen positives Vorzeichen, ein Linienelement in Richtung der jeweiligen Koordinatenachse wird verlängert. Bei negativem Vorzeichen wird ein Linienelement verkürzt. Die Punkte, für welche die dargestellten Werte berechnet wurden, liegen in einem regelmäßigen Raster mit einer Maschenweite von 20 m. Die  $X$ -Koordinaten laufen von 0 bis 500 und die  $Y$ -Koordinaten von -100 bis 180. Für die graphische Darstellung wurden die Werte der Dehnungen mit dem Faktor 2000 multipliziert.

Der größte Wert für  $\underline{\varepsilon}_{11}$  liegt bei 0.0105, der kleinste bei -0.0198, was einer Verlängerung einer 100 m langen Strecke um 1.05 m, bzw. einer Verkürzung um 1.98 m entspricht. Diese Extremwerte liegen am unteren Ende des Gletschers, wo von oben kommendes Material die langsamere Masse an der Gletscherzunge aufschiebt, sowie oberhalb des Gletscherbereichs, in dem die höchsten Verschiebungsgeschwindigkeiten erhalten wurden. Die Tendenz der rutschenden Masse, mit zunehmenden  $X$ -Werten nach rechts wegzudriften, erklärt die höheren Werte für die Dehnungen am linken Gletscherrand. In Bereichen, in denen die Geschwindigkeiten abnehmen (Tabelle 4.3), gehen positive in negative Dehnungen über.

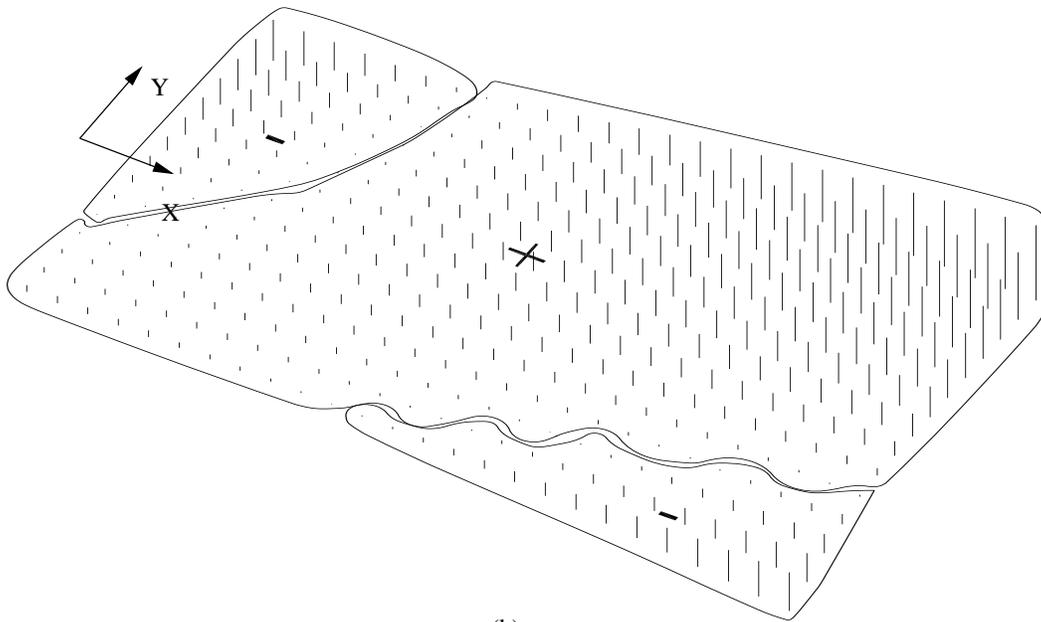
Die Dehnungen in  $Y$ -Richtung ( $\underline{\varepsilon}_{22}$ ) sind am oberen linken und am unteren rechten Ende des Gletschers negativ. Dazwischen zieht sich ein Band, in dem die Dehnungen positiv sind und von rechts oben nach links unten zunehmen. Dies stimmt mit der leichten Rechtskurve überein, auf der sich die rutschende Masse hangabwärts bewegt. Die Extremwerte liegen hier bei 0.0194 bzw. -0.0105. Die Gletschermasse im Bereich V (Abbildung 4.4) bewegt sich stärker in  $Y$ -Richtung als im Bereich VI (ZICK [78]) und verursacht dort Stauchungen. Der Bereich II driftet relativ stark in positiver  $Y$ -Richtung, womit die hohen Werte für die Dehnungen in diesem Bereich zu erklären sind. Im unteren rechten Teil des Gletschers sind die Bewegungsraten in  $Y$ -Richtung dagegen kleiner als im unteren mittleren Bereich. Die langsamere Masse wird von der schnelleren, nachfolgenden zusammengedrückt, was sich in den dort vorherrschenden negativen Werten der Dehnungen widerspiegelt.

Die Abbildung 4.17 zeigt die Dehnungen in  $X$ - und  $Y$ -Richtung als Vektoren von den Maschenpunkten ausgehend gezeichnet, vorzeichenrichtig und mit dem Faktor 2000 überhöht. Sie stellt die in Abbildung 4.16 beinhaltete Information auf eine Weise dar, die den Zusammenhang der Dehnungen in  $X$ - und  $Y$ -Richtung besser veranschaulicht. Die Objektpunkte sind mit eingezeichnet, um die Verteilung der Punkte innerhalb des berechneten Rasters erkennbar zu machen. Die Bereiche mit unterschiedlichen Vorzeichen in den Dehnungen sind gegeneinander abgegrenzt. Das erste Vorzeichen steht für die Dehnung in  $X$ -, das zweite für die in  $Y$ -Richtung (Beispiel: -/+ bedeutet negative Dehnung in  $X$ -, positive in  $Y$ -Richtung). In der Mitte des Gletschers befindet sich ein großer Bereich, in dem die Dehnungen in beiden Achsrichtungen positiv sind. Im oberen Teil

dieses Bereichs dominieren die Dehnungen in  $X$ -Richtung, nehmen jedoch in positiver  $X$ -Richtung ab. Die Dehnungen in  $Y$ -Richtung nehmen in Richtung beider Koordinatenachsen zu.



(a)



(b)

Abbildung 4.16: Dehnungen in  $X$ -Richtung (a) und in  $Y$ -Richtung (b).

Im rechten oberen und im linken unteren Teil des untersuchten Gebiets kommt es zu Stauchungen in  $X$ -Richtung und Dehnungen in  $Y$ -Richtung. Rechts oben ist die Hangneigung relativ groß und flacht aber wieder ab, was der Grund für die Stauchungen in  $X$ -Richtung ist (Abbildung 4.11). Die Bewegungsraten in  $Y$ -Richtung nehmen dort anfangs noch zu, dann aber bald wieder ab, woraus der Übergang zu den Stauchungen in  $Y$ -Richtung resultiert. Links unten wiederholt sich diese Dehnungssituation. In Richtung der Hangneigung wird Material aufgeschoben, was die Stauchungen in  $X$ -Richtung zur Folge hat, während die Punkte im Bereich II mit relativ hohen Bewegungsraten in  $Y$ -Richtung wegdriften und so Dehnungen in diese Richtung verursachen.

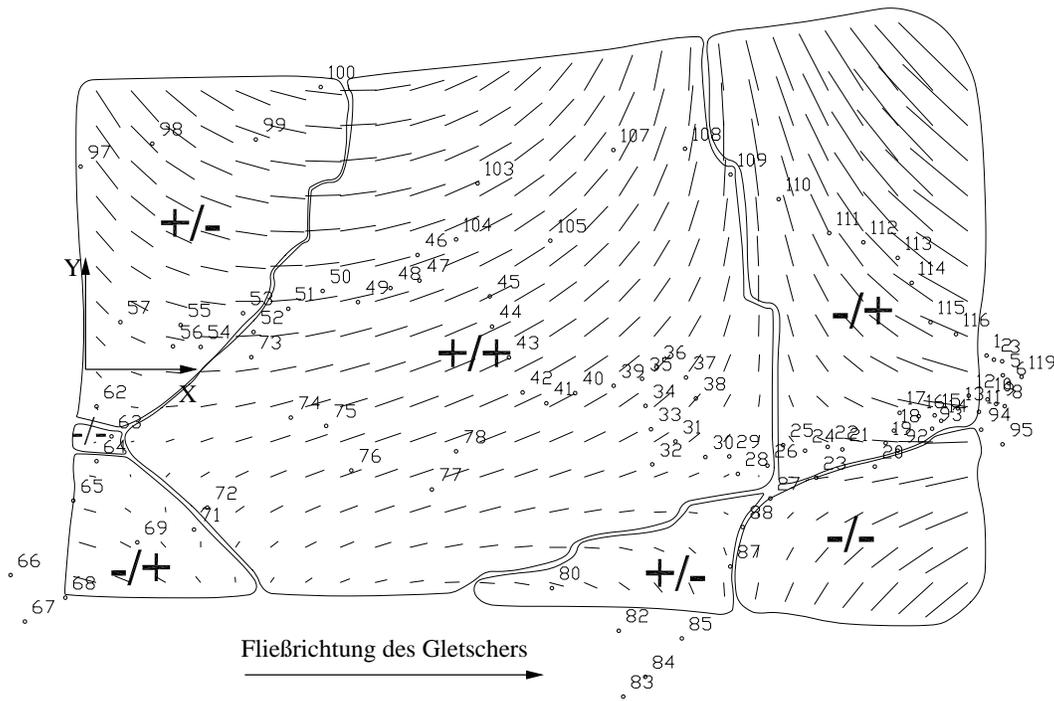


Abbildung 4.17: Dehnungen in X- und Y-Richtung in Abhängigkeit der Lage.

Im Bereich VI (Abbildung 4.4) der insgesamt recht geringe Bewegungsraten aufweist, kommt es zu Dehnungen in X-Richtung und zu Stauchungen in Y-Richtung. Das Material wird dort vom Bereich V zusammengeschieben und gleichzeitig von der unterhalb liegenden, schnelleren Gletschermasse gedehnt.

Ein weiteres Gebiet mit ähnlicher Situation befindet sich im mittleren bis unteren Teil am rechten Gletscher- rand, wo noch Dehnungen in X-Richtung zu verzeichnen sind, während das Material in Y-Richtung schon gegen den ansteigenden Hang aufgeschoben wird. Stauchungen in Richtung beider Koordinatenachsen kommen hauptsächlich unten rechts vor, wo das Gletschermaterial durch die nachkommende, schneller rutschende Masse in Richtung der Hangneigung zusammengeschieben wird und die Gletschermasse gleichzeitig nach rechts gegen festes Gestein hin wandert.

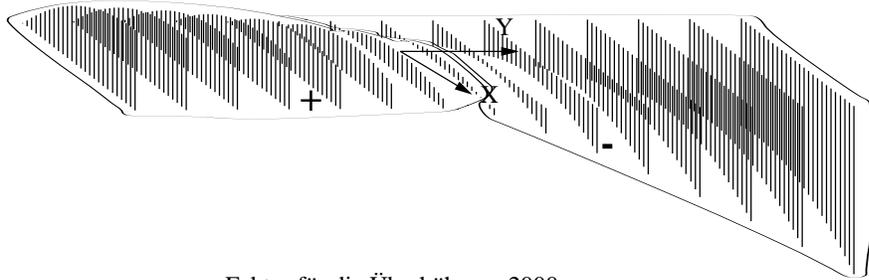
Im unteren rechten Teil des Gletschers treffen nun Bereiche aller Vorzeichenkombinationen aufeinander. Folglich gibt es dort einen Ort, der weder Dehnungen in X-, noch in Y-Richtung erfährt. Dies bedeutet jedoch nicht, dass dort keine Dehnungen vorliegen. Es verschwinden hier lediglich die Dehnungen in Richtung der Koordinatenachsen, nicht jedoch die in beliebig andere Richtungen, was in Abschnitt 4.5.3 noch gezeigt wird.

In Abbildung 4.18 sind die Änderungen von rechten Winkeln, die in der Bezugsplatzierung von Parallelen zu den Koordinatenachsen gebildet wurden, dargestellt. Diese Winkeländerungen werden mit *Gleitungen* bezeichnet. Die Gleitungen in der X-Y-Ebene (Abbildung 4.18a) sind wesentlich größer als in den beiden anderen Ebenen (Abbildung 4.18b und 4.18c). Aus der Tatsache, dass die Änderungen der Bewegungen entlang der X- und der Y-Achse wesentlich größere Beträge annehmen als entlang der Z-Achse, wo die Änderungen gleich null sind, resultieren diese unterschiedlichen Größenordnungen zwangsläufig.

Die Extremwerte für die Winkeländerungen in den verschiedenen Ebenen sind in Tabelle 4.6 zusammengefasst.

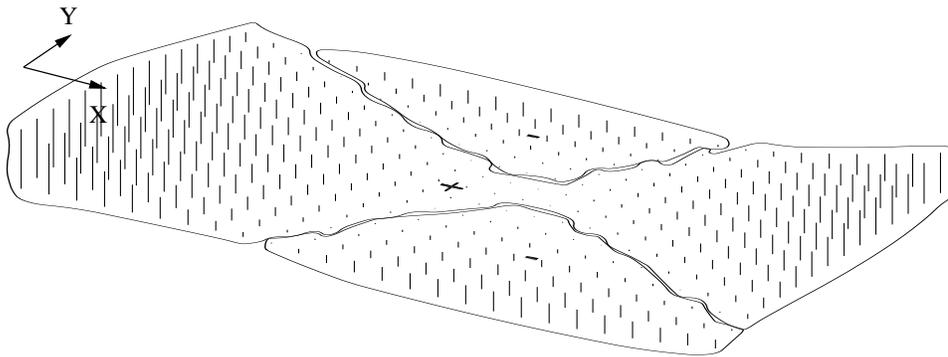
Aufgrund der Tatsache, dass der Verschiebungsgradient in Abhängigkeit der Z-Koordinate gleich null ist, stellt sich die Frage nach der Ursache für Gleitungen in der X-Z- und der Y-Z-Ebene.

Die Verschiebung in Z-Richtung hängt von X und Y ab. Die Änderung dieser Verschiebungskomponente in Abhängigkeit von X und Y ist zwar verhältnismäßig gering, doch immerhin vorhanden, weshalb auch Gleitun-



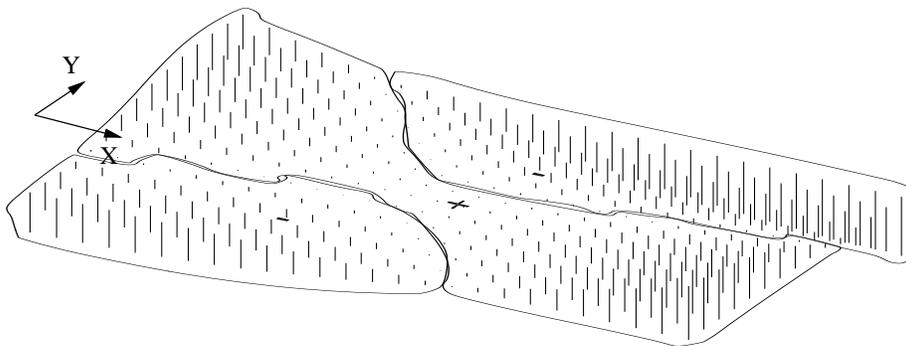
Faktor für die Überhöhung: 2000

(a)



Faktor für die Überhöhung: 5000

(b)



Faktor für die Überhöhung: 5000

(c)

Abbildung 4.18: Gleitungen in der  $X$ - $Y$ -Ebene (a), in der  $X$ - $Z$ -Ebene (b) und in der  $Y$ - $Z$ -Ebene (c).

Ebene	Min [rad]	Max [rad]	Min[gon]	Max [gon]
$X-Y$	-0.0294	0.0140	-1.87	0.89
$X-Z$	-0.0016	0.0046	-0.10	0.29
$Y-Z$	-0.0047	0.0042	-0.30	0.27

Tabelle 4.6: Extremwerte für Gleitungen.

gen in der  $X-Z$ - und der  $Y-Z$ -Ebene zu verzeichnen sind.

Aus Abbildung 4.18a geht außerdem hervor, dass die Gleitungen auf der linken Gletscherhälfte negatives, auf der rechten positives Vorzeichen besitzen. Etwa in der Mitte des Gletschers verläuft eine Linie von oben nach unten, auf der keine Gleitungen in dieser Ebene zu verzeichnen sind. Diese Linie fällt in etwa mit dem Stromstrich zusammen. Wie sich Gleitungen mit unterschiedlichem Vorzeichen auf ein Quadrat auswirken, wird in Abbildung 4.19 veranschaulicht.

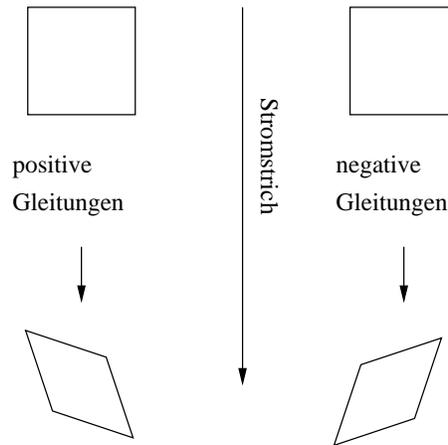


Abbildung 4.19: Schematische Darstellung der Auswirkung von Gleitungen auf ein Quadrat links und rechts des Stromstrichs.

Die Bereiche mit positiven und negativen Gleitungen in den Abbildungen 4.18b und 4.18c sind annähernd punktsymmetrisch zu einem etwa in der Mitte gelegenen Punkt des Gletschers angeordnet. Der Wert für die Gleitung in der  $X-Z$ -Ebene setzt sich zusammen aus dem Gradienten der 3. Komponente des Verschiebungsvektors in  $X$ -Richtung und dem Gradienten der 1. Komponente des Verschiebungsvektors in  $Z$ -Richtung.

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial X} + \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial Z}}_{=0}$$

In Bereichen mit positivem Vorzeichen der Gleitung in Abbildung 4.18b nimmt mit dem  $X$ -Wert auch die Verschiebung in  $Z$ -Richtung zu. Dies trifft im oberen Teil des Gletschers zu, in dem die Verschiebung in dieser Richtung anfangs zwar noch negativ ist, aber doch kontinuierlich ansteigt, auf dem Gletscherrücken dann konstant bleibt, bis sie weiter unten, im Bereich der Aufschiebungen, wieder ansteigt. An den Gletscherrändern und auf dem rechten Teil der Gletscherstirn verringern sich die Verschiebungen in  $Z$ -Richtung mit zunehmendem  $X$ -Wert.

Die Gleitung in der  $Y-Z$ -Ebene setzt sich zusammen aus dem Gradienten der 3. Komponente des Verschiebungsvektors in  $Y$ -Richtung und dem Gradienten der 2. Komponente in  $Z$ -Richtung.

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{\partial u_3}{\partial Y} + \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial Z}}_{=0}$$

Die Interpretation der Abbildung 4.18c erfolgt auf ähnliche Weise. Die Gleitung entlang der Linie  $X = 0$  auf der Gletscheroberfläche hat bei  $Y = -100$  noch einen negativen Wert. In positiver  $Y$ -Richtung nehmen die Werte stetig zu, sind bei  $Y = 180$  positiv, mit dem Null-Durchgang bei etwa  $Y = -20$ . Die Verschiebung in  $Y$ -Richtung selbst hat bei diesem Null-Durchgang den größten negativen Wert (ein Minimum). Bei der Linie  $X = 500$  ergibt sich die umgekehrte Situation für den Gradienten von  $u_3$  in  $Y$ -Richtung. Am rechten Rand der Gletscherstirn ist die Verschiebung in  $Z$ -Richtung negativ mit einem relativ hohem Betrag (Abbildung 4.12). Mit zunehmenden  $Y$ -Werten werden die Beträge kleiner, bis die Verschiebung etwa bei  $Y = 20$  positiv wird, bei  $Y = 100$  ein Maximum erreicht und dann wieder abnimmt. Da die Kurve der Verschiebungen bis zu ihrem Maximum immer langsamer steigt, nimmt die Gleitung stetig ab, hat bei  $Y = 100$  einen Null-Durchgang und wird dann negativ. Der Verlauf der Gleitungen auf der Linie  $X = 0$  geht mit zunehmendem  $X$  kontinuierlich in den Verlauf der Gleitungen auf der Linie  $X = 500$  über. So erklärt sich die punktsymmetrische Verteilung der negativen und positiven Bereiche.

Da die Gleitungen Änderungen von Winkeln sind, die in der Bezugsplatzierung von Parallelen zu den Koordinatenachsen gebildet wurden, kann aus den Vorzeichen der Zahlenwerte folgendes geschlossen werden: Positive Gleitung, also eine Vergrößerung der Winkel in der  $X$ - $Z$ - bzw. der  $Y$ - $Z$ -Ebene ergibt sich, wenn die  $Z$ -Komponente des Verschiebungsvektors in  $X$ - bzw.  $Y$ -Richtung zunimmt. Negative Gleitungen erhält man entsprechend bei abnehmender Verschiebung in  $Z$ -Richtung.

#### 4.5.2 Rotationen

Aus den Elementen des infinitesimalen Drehtensors  $\underline{\Omega}$  wurde für ein Punktraster mit denselben Dimensionen wie in Abschnitt 4.5.1 der Drehvektor  $\bar{\omega}$  berechnet und ausgehend von den zugehörigen Maschenpunkten mit dem Faktor 5000 überhöht gezeichnet. Die Richtung des Drehvektors gibt den Drehsinn an, der Betrag des Vektors entspricht dem Drehwinkel. Der Maximalwert für den Drehwinkel liegt bei 0.0259 rad, was einem Winkelwert von 1.65 gon entspricht. Die Werte der Rotationen sagen etwas ganz anderes aus als die der Gleitungen. Der Drehtensor  $\underline{\Omega}$  beschreibt eine starre Drehung der infinitesimalen Umgebung eines Punktes, während die Änderung eines ursprünglich rechten Winkels durch die Verzerrung des Körpers hervorgerufen wird. Die berechneten Werte des Drehvektors  $\bar{\omega}$  sind in Abbildung 4.20 in zwei unterschiedlichen Ansichten dargestellt.

Abbildung 4.20a zeigt die Rotationsvektoren in die  $X$ - $Y$ -Ebene projiziert, Abbildung 4.20b zeigt die Vektoren von einem Standpunkt vor der Gletscherzunge aus gesehen und zwar mit Blick hangaufwärts. Hier ist zu erkennen, dass die Rotationsvektoren primär in  $Z$ -Richtung, positiv oder negativ, zeigen und dabei nur leicht auf eine Seite hin abkippen. Die Richtung der Abkippung wird aus Abbildung 4.20a ersichtlich. Die Kennzeichnung „+ / +“ bedeutet eine Neigung in positive  $X$ - und positive  $Y$ -Richtung, „- / -“ dagegen eine in beide Achsrichtungen negative Neigung. Die Vektoren in „+ / -“-Bereichen kippen nach vorne und nach links, während sich die mit „- / +“ gekennzeichneten nach hinten und nach rechts neigen.

Anhand der Abbildung 4.20b ist ersichtlich, dass eine Linie existieren muss, auf der keine Drehungen um die  $Z$ -Achse auftreten, wie sie in Abbildung 4.22 dargestellt ist. Links und rechts dieser Linie, die in etwa auf dem Rücken des Gletschers im Stromstrich verläuft, ist der Drehsinn der rotierenden Masse genau entgegengesetzt. Dieser Sachverhalt wird in der Abbildung 4.21 schematisch erläutert.

Der Drehsinn, der sich aus den Berechnungen ergibt, entspricht den Erwartungen. Die Bewegungen im Stromstrich sind am schnellsten, die langsamere Masse links und rechts davon dreht sich auf die jeweilige Seite weg. Die Linie, auf welcher keine Rotationen um die  $Z$ -Achse auftreten, wurde berechnet und ihr Verlauf auf der Oberfläche des Gletschers in Abbildung 4.22 dargestellt. Die Linien, auf denen keine Rotation um die  $X$ -Achse auftritt, laufen entlang der Übergänge von Bereichen, die mit „+ / +“ zu denen, die mit „- / +“ gekennzeichnet sind, wie auch bei den Übergängen von „- / -“ nach „+ / -“ in Abbildung 4.20a. Entsprechend laufen die Linien ohne Rotation um die  $Y$ -Achse entlang der Übergänge von Bereichen mit „+ / +“ nach „+ / -“ und „- / -“ nach „- / +“. Der Verlauf dieser Linien auf der Gletscheroberfläche ist im Anhang in den Abbildungen A.8 und A.9 dargestellt.

Auch die Neigungen der  $\bar{\omega}$  entsprechen den Erwartungen. Im vorderen linken Bereich des Gletschers zeigen die  $\bar{\omega}$  in positive  $Z$ -Richtung und sind nach hinten rechts geneigt. Zur Gletschermitte hin nimmt die Neigung nach rechts zu, bis  $\bar{\omega}$  in der  $X$ - $Y$ -Ebene liegt und weiter rechts nach unten aus dieser herausragt. Die Drehung erfolgt also nach vorne in positive  $Z$ -Richtung, was mit der Aufschubung in diesem Bereich übereinstimmt. Die

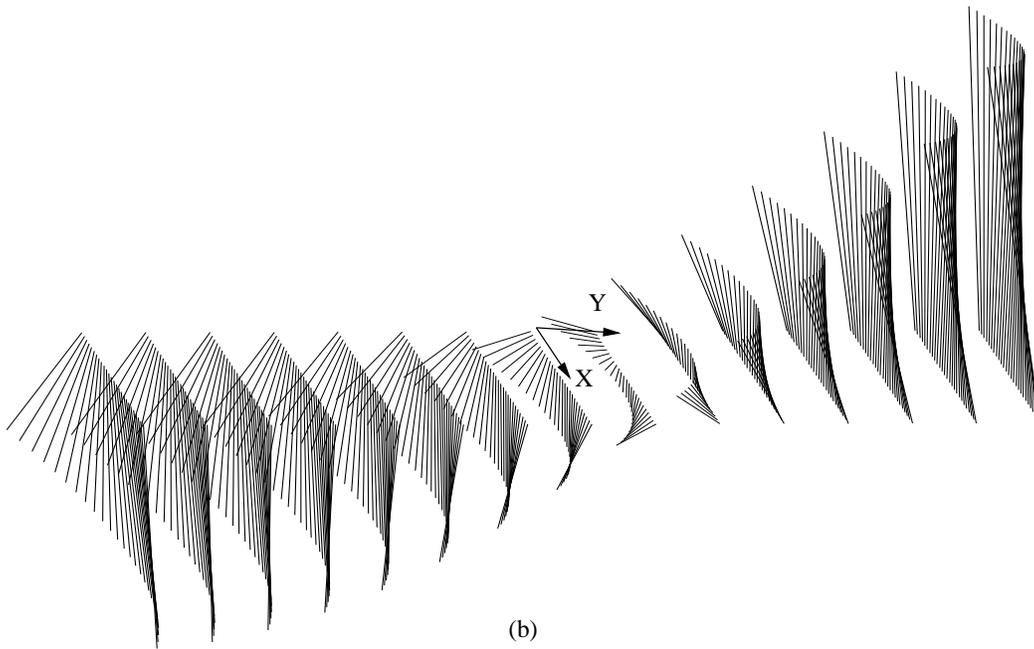
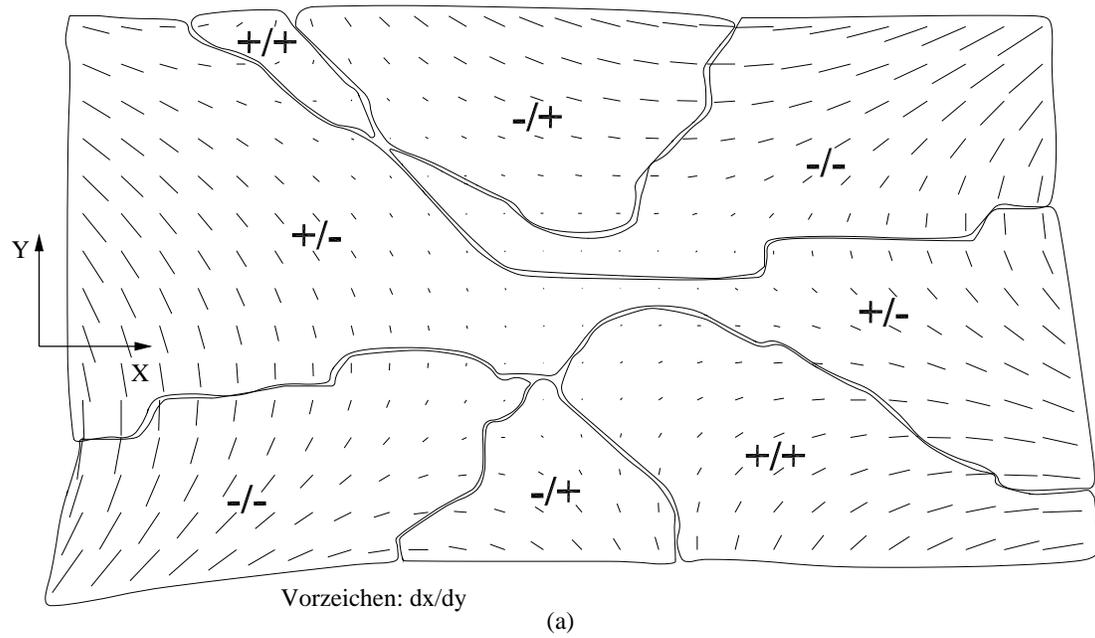


Abbildung 4.20: Darstellung der Drehvektoren  $\bar{\omega}$  in die  $X - Y$ -Ebene projiziert (a) und von einem Punkt vor der Gletscherstirn aus gesehen (b).

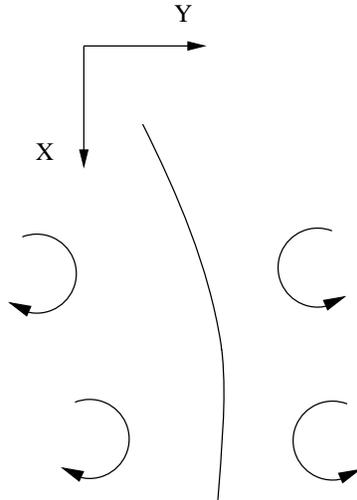


Abbildung 4.21: Schematische Darstellung des Drehsinns der Rotationsvektoren  $\bar{\omega}$ .

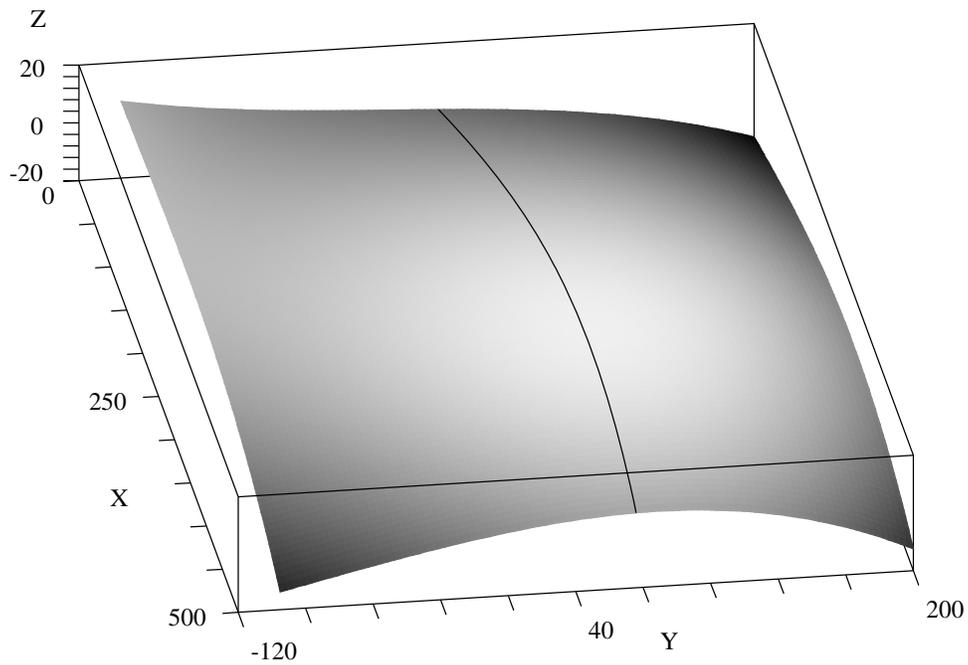


Abbildung 4.22: Darstellung der Linie, auf der keine Rotation um die  $Z$ -Achse auftritt.

Verteilung der Bereiche unterschiedlicher Vorzeichenkombinationen in Abbildung 4.20a weist eine Symmetrie zu einem Punkt in der Mitte des Gletschers auf, an dem die Starrkörperdrehung sehr gering ist.

Eine Neigung des Drehvektors nach vorne bringt eine Drehung zum rechten Rand des Gletschers mit sich. Diese Neigung findet sich in Bereichen mit den Vorzeichen „ $+ / -$ “ und „ $+ / +$ “, im vorderen rechten Teil, wo das Material nach rechts weggedreht wird wie auch hinten links, wo durch die schneller werdende Bewegung in der Hangmitte vom Rand her Gletschermasse hereingedreht wird. Ebenso bringt eine Neigung nach hinten („ $- / +$ “ und „ $- / -$ “) eine Drehung zum linken Rand mit sich. Im vorderen linken und im hinteren rechten Bereich ist diese Situation gegeben. Wie oben wird auch hier Material nach außen weggedreht bzw. zur Mitte hereingedreht.

Die Neigung der Drehvektoren nach links („ $+ / +$ “ und „ $- / +$ “) bedeutet eine Drehung nach unten und findet sich an den Rändern des Gletschers auf mittlerer Höhe. Die mit „ $- / -$ “ und „ $+ / -$ “ markierten Bereiche mit der Tendenz zur Drehung nach oben befinden sich zum einen im vorderen Gletscherbereich, wo die Drehung nach oben durch die Aufschiebung des Gletschers erklärbar ist. Im hinteren Bereich entsteht durch die schnellere Masse im mittleren Gletscherteil eine Wellenbewegung, die im darüberliegenden Bereich eine Drehung nach oben auslöst.

### 4.5.3 Hauptdehnungen und Hauptdehnungsrichtungen

Mittels einer Hauptachsentransformation des infinitesimalen Deformationstensors  $\underline{\varepsilon}$  lassen sich diejenigen Richtungen ermitteln, in denen nur Dehnungen aber keine Winkeländerungen auftreten (Kapitel 2). Die Eigenwerte  $\lambda_i$  der jeweiligen Eigenvektoren geben dabei die Dehnung in diese Richtung an. Da  $\underline{\varepsilon}$  symmetrisch ist, ist das zugehörige Hauptachsensystem orthogonal (ZURMÜHL UND FALK [80]).

Für die Punkte des in den vorangegangenen Abschnitten verwendeten Rasters wurde eine solche Hauptachsentransformation berechnet und die Dreibeine in Abbildung 4.23 dargestellt. Die Achsen der Dreibeine wurden mit dem Faktor 1000 versehen. Die Länge der Hauptachsen entspricht der Dehnung in die jeweilige Richtung. Die Dehnung in Richtung der 3. Hauptachse ist dabei so gering, dass sie nur ganz vorne und ganz hinten am rechten Rand überhaupt zu erkennen ist.

Das Achsensystem, das sich durch die Hauptachsentransformation ergibt, ist dem Bezugskoordinatensystem gegenüber gedreht, wobei die Drehung um die  $Z$ -Achse dominiert. Lediglich im oberen und unteren rechten Bereich des Gletschers, wo die Bewegungen in  $Z$ -Richtung und ihre Gradienten etwas größer ausfallen, sind die Drehungen um die beiden anderen Achsen etwas ausgeprägter. Die Linien, welche die Hauptachsenrichtungen andeuten, sind Tangenten an die sogenannten Hauptdehnungstrajektorien. Das Muster, das durch diese Art der Darstellung entsteht, ähnelt dem, das sich ergibt, wenn man Eisenfeilspäne einem Magnetfeld aussetzt. Ebenso wie die Eisenfeilspäne den Verlauf der magnetischen Feldlinien wiedergeben, so deuten die Hauptachsen des infinitesimalen Deformationstensors den Verlauf der Hauptdehnungstrajektorien an. Diese verlaufen jedoch, im Gegensatz zu den magnetischen Feldlinien, in jedem Punkt in drei zueinander senkrechten Richtungen.

Die Hauptdehnungen und ihre zugehörigen Richtungen sind entlang einer fast geraden Linie auf dem Gletscherrücken verhältnismäßig klein und bei etwa  $X = 380$  und  $Y = 50$  minimal. Die Dehnungen sind dort, wo die Verschiebungen am größten sind, demnach relativ gering. Dies folgt aus den kleinen Änderungen in den Verschiebungen entlang des Stromstrichs. Zu größeren Beträgen für die Dehnungen kommt es an den Rändern des Gletschers, insbesondere im vorderen linken Teil der Gletscherstirn. Zu den Rändern des Gletschers hin nehmen die Geschwindigkeiten der Verschiebungen ab, daher werden die Beträge der Dehnungen dort auch größer. Die Richtungen der Hauptdehnungen sind im Stromstrich, abgesehen von einer kleinen Zone etwa in der Gletschermitte, in etwa parallel zu den Koordinatenachsen. Zu den Rändern hin nimmt die Rotation des Hauptachsensystems des Deformationstensors gegenüber dem Koordinatensystem zu.

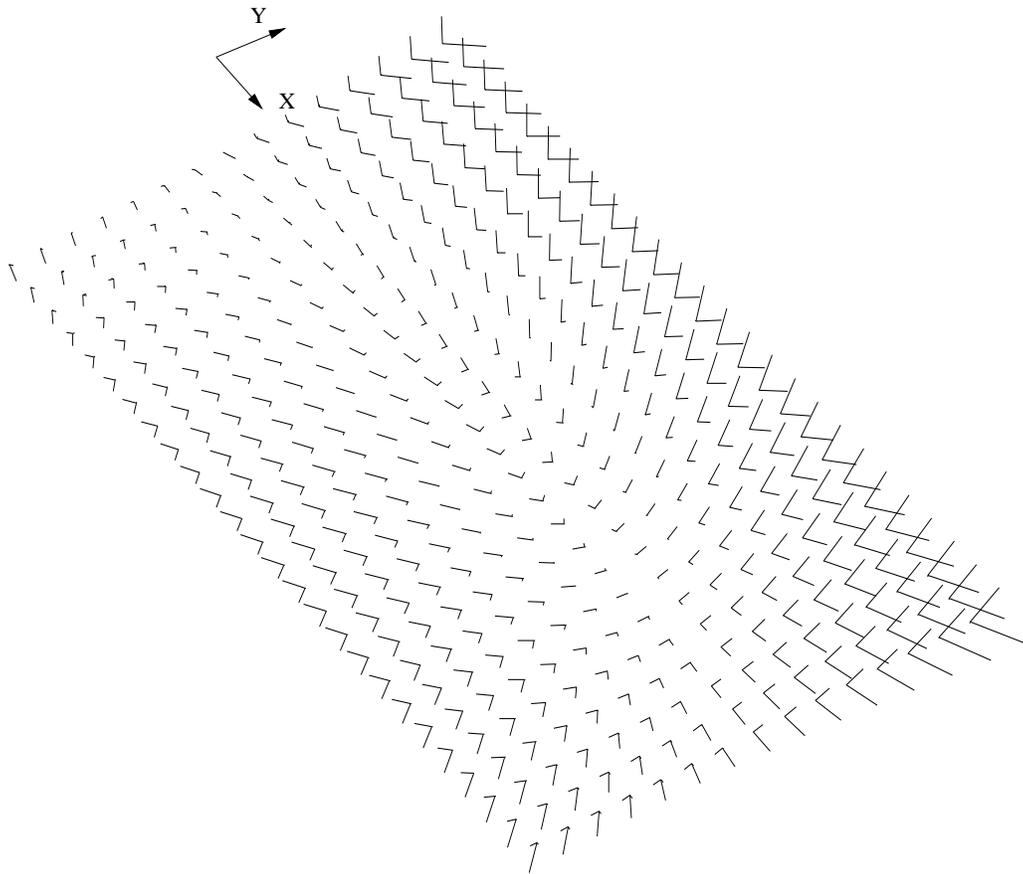


Abbildung 4.23: Hauptdehnungsrichtungen im Gletscher.

## 5 Beurteilung der Modellansätze

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit bauen auf bereits bekannten Deformationsanalyseverfahren auf, bei denen Probleme, wie z. B. die Identifizierung instabiler Stützpunkte und damit die Definition des Datums bereits gelöst sind. Die Daten, mit denen die hier vorgestellten Analyseverfahren durchgeführt wurden, bestehen nur noch aus dreidimensionalen Objektpunktkoordinaten, da die Stützpunkte, von denen aus die Objektpunkte bestimmt wurden, keine weitere Rolle mehr spielen. Die Analysen von Veränderungen in der Netzgeometrie wie auch von Einzelpunktverschiebungen sind keine notwendige Voraussetzung für die praktische Umsetzung der Theorien in dieser Arbeit. Eine Durchführung ist jedoch zu Vergleichszwecken und als Interpretationshilfe zu empfehlen. Die Koordinaten der Objektpunkte müssen in den verschiedenen Epochen in einem einheitlichen Datum vorliegen, wobei nicht jeder Punkt in allen Epochen vorhanden sein muss. Liegen nicht genügend Epochenkoordinaten für einen Punkt vor, so wird dieser für die Interpolation der Zeitfunktionen und damit auch bei der Berechnung der Flächenkoeffizienten nicht verwendet.

Die Bestimmungen von Deformationsmaßen, wie sie in dieser Arbeit durchgeführt wurden, ergänzen die Ergebnisse klassischer Verfahren der Deformationsanalyse um einige zusätzliche Größen der Kinematik des Kontinuums. Die Modellierung eines Kontinuums durch geeignete Interpolationsverfahren ermöglicht es, lokale Deformationen, Dehnungen und Drehungen zu ermitteln, was bisher auf die globale Netzgeometrie beschränkt war. Es lassen sich auch Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren für jeden beliebigen Punkt zu jeder beliebigen Zeit auf der Oberfläche des Objekts berechnen, was durch die klassischen Verfahren nur an den gemessenen Objektpunkten und nur zwischen einzelnen Epochen möglich ist. Dies führt auf den Gedanken, die Verschiebungen und Deformationen für zukünftige Zeitpunkte zu extrapolieren, um Voraussagen treffen zu können. Prinzipiell besteht diese Möglichkeit, wie gut die extrapolierten Werte die Realität beschreiben, hängt jedoch stark von den verwendeten Interpolationsfunktionen für die Zeitfunktionen (Abschnitt 3.2) ab. Handelt es sich dabei um Polynome, wie in der Beispielrechnung in Kapitel 4, so liefert eine Extrapolation wahrscheinlich keine verlässlichen Ergebnisse. Werden die Bewegungen allerdings durch Funktionen interpoliert, deren Koeffizienten von den verursachenden Kräften abhängen, so kann die Extrapolation durchaus realistische Voraussagen liefern. Diese Vorgehensweise erfordert jedoch die Messung und Modellierung physikalischer Größen und ist ein Schritt in Richtung der dynamischen Modelle.

Bereits bei den Interpolationen der Zeitfunktionen entstand durch die graphische Darstellung ihrer Koeffizienten in Abhängigkeit der Koordinaten eine Informationsquelle, aus der sich viele Interpretationsmöglichkeiten für den Verlauf der Bewegung der Gletschermasse ergaben (Abschnitt 4.4.1).

Zahlenwerte für die Genauigkeit der interpolierten Koeffizienten und der daraus berechneten Deformationsmaße wurden nicht berechnet. Somit sind keine statistisch fundierten Aussagen und Prüfungen der Ergebnisse möglich. Die Beurteilung der Güte der Ergebnisse beruht ausschließlich auf Plausibilitätsüberlegungen.

Für die Interpolationen in Kapitel 4 wurden verhältnismäßig einfache Basisfunktionen verwendet. Die reale Bewegung der Gletschermasse wird durch dieses Modell stark vereinfacht. Lokale Änderungen im Bewegungsverhalten werden durch dieses Modell nicht erfasst. Die berechneten Dehnungen, Gleitungen und Rotationen haben daher für globale Tendenzen eine Aussagekraft. Durch die Berechnung mit realen Daten am Beispiel des Blockgletschers Macun I in Kapitel 4 wird gezeigt, dass der in dieser Arbeit vorgestellte Ansatz zur Analyse von Deformationen ein gangbarer Weg ist. Die Verwendung anderer Interpolationsverfahren, die mehr Wellen in den zu interpolierenden Flächen modellieren können und damit auch differenziertere Ergebnisse für Deformationsmaße liefern, bieten eine vielversprechende Grundlage für weitere Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet. Für diese Zwecke scheint die Verwendung von Dreiecks-Bézier-Flächen gut geeignet.

## 6 Möglichkeiten zur Erweiterung der hier vorgestellten Modelle

### 6.1 Signalverarbeitung zur Bestimmung der Zeitfunktionen

Wie in Abschnitt 3.2 bereits erwähnt, ist die Bestimmung der Funktionen, welche die zeitliche Änderung der Koordinaten eines Punktes beschreiben, ein Problem, dessen Lösung in weiteren Arbeiten angegangen werden sollte. Ein Werkzeug hierfür ist die digitale Signalverarbeitung. Die Koordinaten eines Punktes, die zu verschiedenen Zeitpunkten bestimmt werden, können als gemessene Signale, die mit einem Rauschen behaftet sind, verstanden werden. Es handelt sich also um stochastische Signale. In der Wahrscheinlichkeitstheorie werden diese Signale *stochastische Prozesse* genannt (BÖHME [11]). Die einzelnen Messungen sind Elementarereignisse eines Zufallsexperiments. Das zufällige Verhalten wird mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$  beschrieben. Für einen beliebigen Zeitpunkt  $t$  ist  $X(t)$  eine Zufallsvariable, welche das Modell für das zur Zeit  $t$  gemessene Signal darstellt. Die Gesamtheit dieser Zufallsvariablen heißt *stochastischer Prozess*. Dieser entspricht einer Abbildung, die jedem Zeitpunkt  $t$  und jedem Elementarereignis  $\xi$  eine reelle Zahl zuordnet. Für ein festes  $t$  ist  $\xi \rightarrow X(t, \xi)$  eine Zufallsvariable. Ist  $\xi$  fest, so erhält man eine Zeitfunktion  $t \rightarrow X(t, \xi) = x(t)$ . Sie wäre dann das im Sinne eines Versuchsergebnisses gemessene Signal (BÖHME [11]). Durch die Zerlegung des stochastischen Prozesses in einen *deterministischen* und einen *stochastischen Anteil* ließen sich sowohl Genauigkeitsaussagen treffen als auch statistische Tests durchführen und damit eine statistische Analyse der Ergebnisse durchführen.

Bewegungen eines Objektes, die einen gewissen Trend aufweisen, der durch Bestimmung der Objektpunktkoordinaten zu diskreten, ausgewählten Zeitpunkten ermittelt werden kann, sind bestimmten Zyklen unterworfen, wie z. B. jahreszeitlich bedingten Schwankungen in der Temperatur und Änderung der Ausdehnung durch unterschiedliche Sonneneinstrahlung im Tagesverlauf. Diese periodisch schwankenden Einflüsse verlaufen entlang sich überlagernder Sinusfunktionen. Sollen Frequenzen und Amplituden solcher Signale mit Hilfe der Signalverarbeitung berechnet werden, so müssen die Messungen in Zeitabständen durchgeführt werden, die das Abtasttheorem (BÖHME [11] oder KRONMÜLLER [48]) nicht verletzen. Bei dieser Vorgehensweise können verursachende physikalische Größen in die Analyse mit einbezogen werden.

### 6.2 Erweiterung von $\bar{u}(X, Y, t)$ nach $\bar{u}(X, Y, Z, t)$

Durch die Vernachlässigung der  $Z$ -Komponente bei der Interpolation des Verschiebungsvektors ändern sich die Deformationsmaße entlang dieser Achsrichtung bei konstantem  $X$  und  $Y$  nicht. Dies hat bei der Wahl des Koordinatensystems nach Abschnitt 4.3 zur Folge, dass alle Punkte auf einer Geraden, die annähernd der Oberflächennormalen entspricht, dasselbe Bewegungsverhalten aufweisen. Dies ist nicht realistisch, doch können durch klassische Messmethoden der Geodäsie nur Punkte an der Oberfläche eines Objektes erfasst werden. Die Rheologie kennt Modelle für das Fließverhalten unterschiedlich gearteter Körper und Flüssigkeiten. Rheologische Modelle werden bereits seit langem in Disziplinen wie der Boden- und Felsmechanik und der Ingenieurgeologie zur Beschreibung morphologischer Prozesse verwendet (KEEDWELL [45] oder BLINDE ET AL [12]). Zur Rheologie im Allgemeinen sei auf LENZ [50] oder REINER [57] verwiesen. Die Grundidee bei rheologischen Modellen besteht in der phänomenologischen Formulierung von Materialgleichungen für bestimmte Grundmodelle. Hierauf aufbauend wird dann reales Materialverhalten durch Zusammenschalten verschiedener Grundmodelle approximiert (ALTENBACH UND ALTENBACH [3]).

Ein Fließmodell stellt beispielsweise das Modell der reibungsbehafteten, inkompressiblen Flüssigkeit nach Newton dar. Zur theoretischen Beschreibung stelle man sich eine reibungsbehaftete Flüssigkeit vor, die an zwei begrenzenden Platten haftet. Wird die eine Platte parallel zur anderen mit der Geschwindigkeit  $\bar{v}$  bewegt, so ergibt sich das in Abbildung 6.1 dargestellte Geschwindigkeitsprofil.

Die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der Flüssigkeit ist in Richtung von  $\bar{e}_1$  linear und lässt sich durch

$$v_1(x_2) = \frac{v_0}{h} x_2 \quad \text{mit} \quad v_1(x_2 = 0) = 0 \quad \text{und} \quad v_1(x_2 = h) = v_0$$

beschreiben. Der Geschwindigkeitsgradient entlang der  $x_2$ -Achse ist in diesem Modell konstant. Um die Geschwindigkeit konstant zu halten, muss eine Kraft  $\bar{F}$  aufgebracht werden, die den Reibungswiderstand in der Flüssigkeit überwindet. Die dieser Kraft zugeordnete Kraft pro Flächeneinheit, die sogenannte Schubspannung  $\sigma_{21}$ , ist dem Geschwindigkeitsgradienten proportional (LENZ [50]).

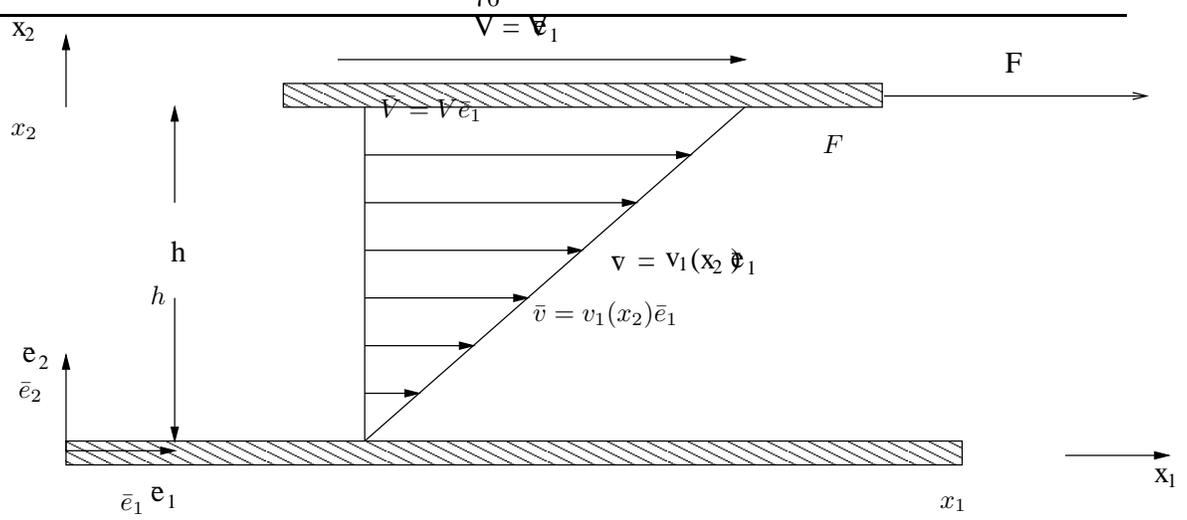


Abbildung 6.1: Newtonsches Fließen (LENZ [50]).

Weitere Geschwindigkeitsverteilungen lassen sich durch jede beliebige Funktion beschreiben. Der Verlauf eines solchen Geschwindigkeitsprofils lässt sich durch Inklinometermessungen ermitteln. Diese werden in der Geotechnik häufig angewandt, um Rutschbewegungen in Hanglagen zu analysieren. Die daraus gewonnenen Daten wurden in der Deformationsanalyse bisher jedoch nicht in Kombination mit geodätischen Messungen verwendet. Für die Messung wird durch die rutschenden Bodenschichten in ein Bohrloch ein Kunststoffrohr mit 4 Nuten, die einander paarweise diametral gegenüberliegen, eingebracht. Durch unterschiedliche Fließgeschwindigkeiten in den Bodenschichten ändert sich die Rohrneigung mit zunehmender Zeit. Diese Neigungen lassen sich in zwei Richtungen, die zueinander senkrecht stehen, bestimmen und graphisch darstellen (ROHN [58] und SCHNEIDER [64]). Diese Kurve kann als Grundlage für die Formulierung einer Funktion zur Beschreibung der Geschwindigkeitsverteilung im Innern der Rutschmasse dienen. Auf diese Weise können die Inklinometermessungen in die geodätische Deformationsanalyse integriert werden.

### 6.3 Einführung kinetischer Größen und Übergang zum dynamischen Modell

Als Folge äußerer Krafteinwirkung entstehen im Innern eines Körpers Spannungen, die durch einen Spannungsvektor  $\bar{\sigma}$  beschrieben werden. Schneidet man aus einem deformierten, belasteten Körper ein Teilstück heraus, und soll dieser Teilkörper in deformiertem Zustand bleiben, so muss auf dessen Oberfläche eine Kräfteverteilung angebracht werden, welche die Wirkung des verbleibenden Restkörpers simuliert (LENZ [51]). Nach LENZ [51] und ALTENBACH UND ALTENBACH [3] ist der Spannungsvektor  $\bar{\sigma}$  definiert als Zusammenfassung dieser Kräfteverteilung in einem Flächenstück  $\Delta A$ , was sich zu

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{n}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta A} = \frac{d\bar{F}}{dA}$$

schreiben lässt. Der Vektor  $\bar{n}$  ist dabei der äußere Normaleneinheitsvektor des betrachteten Flächenelements. Bei dem speziellen Schnitt  $x_1 = \text{const.}$  (parallel zur  $x_2 - x_3$ -Ebene) lässt sich der Spannungsvektor in seine drei Komponenten parallel zu den Koordinatenachsen zerlegen und man erhält

$$\bar{\sigma}_1(\bar{x}) = \sigma_{11}(\bar{x})\bar{e}_1 + \sigma_{12}(\bar{x})\bar{e}_2 + \sigma_{13}(\bar{x})\bar{e}_3$$

mit der Normalspannung  $\sigma_{11}$  und den Tangentialspannungen (auch Schub- oder Scherspannungen)  $\sigma_{12}$  und  $\sigma_{13}$ . Für  $x_2 = \text{const.}$  bzw.  $x_3 = \text{const.}$  erhält man analog  $\bar{\sigma}_2(\bar{x})$  bzw.  $\bar{\sigma}_3(\bar{x})$ . Bezeichnet  $i$  die Schnittfläche ( $x_i = \text{const.}$ ) und  $k$  die Richtung der Spannungskomponente, so kann der Spannungsvektor zu

$$\bar{\sigma}_i(\bar{x}) = \sigma_{ik}(\bar{x})\bar{e}_k$$

geschrieben werden (LENZ [51]). Die  $\sigma_{ik}$  sind die Komponenten des *Cauchyschen Spannungstensors*

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\bar{x}) = \sigma_{ik}(\bar{x})\bar{e}_i \otimes \bar{e}_k.$$

Bei einem elastischen Körper ist der Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor und dem Deformationstensor über den *Tensor der Steifigkeiten*  $\underline{C}$  nach

$$\sigma_{ik} = C_{iklm}(\bar{x})\varepsilon_{lm}$$

gegeben.  $\underline{\underline{C}}$  ist ein Tensor 4. Stufe mit 81 Komponenten, die in homogenem Material ortsunabhängig sind. Da  $\underline{\underline{\sigma}}$  und  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  symmetrische Tensoren sind, verringert sich die maximale Zahl der Komponenten auf 36. Für einen linearelastischen isotropen Körper verringert sich die Zahl der unabhängigen Komponenten von  $\underline{\underline{C}}$  auf 2 (LENZ [51]). Diese beiden Komponenten sind der Schubmodul  $G$  und die Querkontraktionszahl  $\nu$ . Damit wird der Spannungstensor zu

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2G \left( \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Spur}[\underline{\underline{\varepsilon}}] \underline{\underline{1}} \right).$$

Diese Gleichung beschreibt das *Hookesche Materialgesetz für den homogenen, linearelastischen, isotropen Körper* oder kurz *Hookesches Gesetz* (LENZ[51]). Die Umkehrung dieses Gesetzes führt auf

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2G} \left( \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Spur}[\underline{\underline{\sigma}}] \underline{\underline{1}} \right).$$

Prinzipiell ist ein Blockgletscher, wie auch jeder rutschende Hang, kein homogener Körper, doch können Materialeigenschaften für ein Gemenge aus verschiedenen Materialien (z. B. Eis und Stein) angenommen werden und für diese ein Spannungstensor berechnet werden. Die Ergebnisse können durch Spannungsmesser, die in die rutschende Masse eingebracht werden, geprüft und die Materialannahmen gegebenenfalls korrigiert werden. Die Voraussetzung eines elastischen Körpers ist bei kleinen Deformationen in 1. Näherung gegeben, sodass ein solcher Versuch bei einem Blockgletscher sehr interessant erscheint. Der Spannungstensor lässt sich wie der infinitesimale Deformationstensor in sein Hauptachsensystem transformieren, wodurch sich die Hauptspannungen und die Hauptspannungsrichtungen ergeben.

Wie das Verhalten des elastischen Körpers lassen sich auch elastisch-plastisches Materialverhalten, Viskosität oder Kriechverhalten modellieren. Doch werden die Modelle komplizierter, die Anzahl der materialspezifischen Kennwerte nehmen zu und der Geodät verlässt mehr und mehr sein Fachgebiet. Die Gleichungen zur Beschreibung der spezifischen Besonderheiten von materiellen Körpern werden als *Konstitutivgleichungen* bezeichnet (ALTENBACH UND ALTENBACH [3]). Sie werden benötigt, um die Unbekannten, die bei der Aufstellung der Bilanzgleichungen (Masse-, Impuls-, Drehimpuls- und Energiebilanz) auftreten, zu bestimmen. In den Bilanzgleichungen treten als Parameter verschiedene auf den Körper wirkende Kräfte auf, wie Massenkräfte, Volumenkräfte, Oberflächenlasten sowie Einflüsse thermischer Natur. Die konstitutiven Gleichungen verknüpfen phänomenologische Variablen wie Spannungen, Verzerrungen und Temperatur. Gelingt die Aufstellung von Konstitutivgleichungen, die für das Kontinuum repräsentativ sind, so ergibt sich, in Kombination mit den Bilanzgleichungen, ein dynamisches Modell zur Deformationsanalyse. Die Lösung dieses Problems ist allerdings eine sehr komplexe Aufgabe. Ab einem gewissen Punkt ist die Analyse von Deformationen, die geodätische Mess- und Analysemethoden mit der Kontinuumsmechanik verbindet, sicherlich ein interdisziplinäres Problem, das mit qualifiziertem Personal aus den beteiligten Fachrichtungen angegangen werden muss.

## 7 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Verfahren zur Deformationsanalyse vorgestellt, das eine Erweiterung der bisher üblichen Modelle darstellt. Aufbauend auf den Ergebnissen der Ausgleichung der Einzelepochen und der statistischen Analysen zur Identifizierung von nicht stabilen Stützpunkten wurde ein Modell gebildet, das ein Kontinuum kinematisch vollständig beschreibt. Hierzu wurden aus den Messungen an den Einzelpunkten, durch die das zu untersuchende Objekt diskretisiert wurde, zeitkontinuierliche Verschiebungsvektoren für jeden beliebigen Punkt des Kontinuums berechnet. Das Interpolationsproblem, das bei der Berechnung eines Verschiebungsvektors als Funktion des Ortes und der Zeit gelöst wurde, wird in folgende zwei Schritte eingeteilt: in die Formulierung einer Funktion für jeden einzelnen Objektpunkt in Abhängigkeit von der Zeit und in die anschließende flächenhafte Interpolation der Koeffizienten der Zeitfunktionen.

Die Funktionen zur Beschreibung der Bewegung des Kontinuums müssen genügend oft differenzierbar sein, eine Bedingung, die bei der Interpolation berücksichtigt werden muss. Es wurden verschiedene Möglichkeiten zur Interpolation der Zeitfunktionen wie auch der flächenhaften Interpolation beschrieben und diskutiert. Die Theorie der Kinematik des Kontinuums wurde kurz erläutert. Möglichkeiten zur Berechnung von Deformationsmaßen auf der Basis des ermittelten Verschiebungsvektorfeldes wurden aufgezeigt und diskutiert.

An einem numerischen Beispiel mit realen Daten aus Messungen am Blockgletscher Macun I wurde gezeigt, dass das vorgestellte Verfahren Ergebnisse über das lokale Deformationsverhalten liefert, was bei den klassischen Verfahren bisher nicht der Fall war. Berechnete und graphisch dargestellte Deformationsmaße für die Punkte eines Rasters lassen Rückschlüsse auf das globale Bewegungsverhalten des untersuchten Objekts zu. Die durchgeführten Untersuchungen von Effekten wie Dehnungen, Gleitungen und Rotationen vermitteln einen guten Einblick in das Deformationsverhalten von unterschiedlichen Teilbereichen des gesamten Blockgletschers über einen größeren Zeitraum. Vergleicht man die berechneten Ergebnisse mit den allgemeinen Beschreibungen über Gletscherbewegungen in Abschnitt 4.1 oder z. B. bei PRESS UND SIEVER [56], so findet man hier eine große Übereinstimmung. Sämtliche berechneten kinematischen Größen sind mit den allgemeinen schematischen Darstellungen (Abbildungen 4.1 und 4.2) über Gletscherbewegung konform.

Rutschende Hänge und Muren in Gebirgsregionen verursachen immer wieder Beschädigungen an Bauwerken und können große Katastrophen auslösen. Ein besseres Verständnis ihres Bewegungs- und Deformationsverhaltens ermöglicht effizientere Schutzmaßnahmen. Im Hinblick hierauf ist sicherlich auch die Berechnung von Spannungen und Hauptspannungsrichtungen ein wichtiger Schritt, der als Erweiterung der entwickelten Modelle vorgeschlagen wird.

Das in vorliegender Arbeit vorgestellte Verfahren zur Analyse von Deformationen enthält einige Schnittstellen als Ansatzpunkte für weitere Untersuchungen und Modellerweiterungen. Die Möglichkeit der Integration hybrider Daten ist gegeben und der Übergang von kinematischen auf dynamische Modelle kann vollzogen werden, wenn es gelingt, die Konstitutivgleichungen aufzustellen, die den Zusammenhang zwischen Spannungs- und Deformationsgrößen beschreiben. Diese Gleichungen beschreiben materialspezifische Eigenschaften des zu untersuchenden Objekts und sind aus diesem Grunde von vielen Parametern abhängig, die aus experimentellen Untersuchungen abgeleitet werden müssen, was bedeutet, dass auf geotechnische und physikalische Messmethoden nicht mehr verzichtet werden kann.

## Dank

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. G. Schmitt für die Vergabe des Themas, sein Vertrauen und die freien Arbeitsmöglichkeiten, die mir während der Arbeit am GIK gewährt wurden. Herrn Prof. Ir. J. van Mierlo danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Dr. J. Rohn, Frau Meier-Hirmer und Michael und Eva Heimlich für ihre Mühe beim Korrekturlesen der Arbeit.

---

Danke auch an alle Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter des Instituts, die mich bei der Durchführung dieser Arbeit unterstützt haben.

## Literatur

- [1] S. Abramowski and H. Müller. *Geometrisches Modellieren*, volume 75 of *Informatik*. BI Wissenschaftsverlag, 1991.
- [2] P. Alfeld. Scattered data interpolation in three or more variables. In L.L. Schumaker and T. Lyche, editors, *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, pages 1–33. Academic Press, 1989.
- [3] J. Altenbach and H. Altenbach. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B.G. Teubner Stuttgart, 1994.
- [4] G. Aumann and K. Spitzmüller. *Computerorientierte Geometrie*, volume 89 of *Informatik*. BI Wissenschaftsverlag, 1993.
- [5] C. Bangert, T. Mohs, R. Straub, and H. Prautzsch. Cagd-applets - an interactive tutorial on geometric modeling. <http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/inhalt.html>, 1999. Copyright© Institut für Betriebs- und Dialogsysteme, Universität Karlsruhe.
- [6] D. Barsch. Studien und messungen an den blockgletschern in macun, unterengadin. *Zeitschrift für Geomorphologie*, Suppl. 8:11–30, 1969.
- [7] D. Barsch. Eine abschätzung von schuttproduktion und schutttransport im bereich aktiver blockgletscher der schweizer alpen. *Zeitschrift für Geomorphologie N. F.*, Suppl.-Bd. 28:148–160, 1977.
- [8] D. Barsch. Nature and importance of mass-wasting by rock-glaciers in alpine permafrost environments. *Earth Surface Processes*, Bd. 2:231–245, 1977.
- [9] D. Barsch and W. Zick. Die bewegungen des blockgletschers macun 1 von 1965-1988 (unterengadin/schweiz). *Zeitschrift für Geomorphologie N. F.*, Bd. 35(Heft 1):1–14, 1991.
- [10] J. Betten. *Kontinuumsmechanik*. Springer, 1993.
- [11] J.F. Böhme. *Stochastische Signale*. B.G. Teubner Stuttgart, 1998.
- [12] A. Blinde, H. Leussink, and L. Müller, editors. *Rheologie und Felsmechanik*. Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe, Heft 41, 1969.
- [13] P. Bonitz. *Ein Beitrag zur Theorie des Entwurfes doppelt gekrümmter Flächen unter differentialgeometrischen technischen Aspekten*. PhD thesis, TU Dresden, 1976.
- [14] U. Breymann. *C++ Eine Einführung*. Carl Hanser Verlag, 1997.
- [15] M. Bäumker and H.-P. Fitzen. Permanente Überwachung einer talsperre mit gps. In F. Deumlich, editor, *80. Deutscher Geodätentag in Dresden*, pages 233–242. Verlag K. Wittwer, Stuttgart, 1996.
- [16] P. Bézier. *Numerical Control, Mathematics and Applications*. John Wiley & Sons, 1972.
- [17] M.S. Casale and E.L. Stanton. An overview of analytic solid modeling. *IEEE Computer Graphics & Applications*, Bd. 5:45–56, 1985.
- [18] W. Caspary and K. Wichmann. *Lineare Modelle*. R. Oldenbourg Verlag GmbH, München, 1994.
- [19] Y.Q. Chen, A. Chrzanowski, and J.M. Secord. A strategy for the analysis of stability of reference points in deformation surveys. *CISM Journal*, Vol. 44(2):39–46, 1990.
- [20] J. Cunningham. *Vektoren*. Akademie-Verlag, Berlin, 1972.
- [21] R.B. Davies. Writing a matrix package in c++. In *OON-SKI'94: The second annual object-oriented numerics conference*, pages 207–213. Rogue Wave Software, Corvallis, 1994.
- [22] R.B. Davies. Documentation for newmat09, a matrix library in c++. Software Dokumentation, unveröffentlicht, 1997.
- [23] P. de Casteljaou. Outillages méthodes calcul. Technical report, A. Citroen, Paris, 1959.

- [24] P. de Casteljaou. Courbes et surfaces à poles. Technical report, A. Citroen, Paris, 1963.
- [25] D. Eddelbuttel. Object-oriented econometrics: matrix programming in c++ using gcc and newmat. *Journal of Applied Econometrics*, Bd. 11(Nr. 2):199–209, 1996.
- [26] C. Ehlert. Darstellung und interpretation von bewegungsmessungen auf dem blockgletscher macun, unterengadin. Studienarbeit am Geodätischen Institut der Universität Karlsruhe (TH), unveröffentlicht, 1994.
- [27] G. Engeln-Müllges and F. Reutter. *Numerik-Algorithmen*. VDI Verlag, 1996.
- [28] G. Farin. Triangular bernstein-bézier patches. *Computer Aided Geometric Design*, Bd. 3:83–127, 1986.
- [29] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, 1997.
- [30] R. Farwig. Multivariate interpolation of arbitrarily spaced data by moving least squares methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Bd. 16:79–93, 1986.
- [31] T. A. Foley. Interpolation and approximation of 3d and 4d scattered data. *Computers and Mathematics with Applications*, 13:711–740, 1987.
- [32] A.R. Forrest. Interactive interpolation and approximation by bézier polynomials. *Computer Journal*, Bd. 15(Nr. 1):71–79, 1972.
- [33] R. Franke. Scattered data interpolation: Tests of some methods. *Mathematics of Computation*, Bd. 38(Nr. 157):181–200, 1982.
- [34] R. Franke. Recent advances in the approximation of surfaces from scattered data. In C.K. Chui, L.L. Schumaker, and F.I. Utreras, editors, *Topics in Multivariate Approximation*, pages 79–97. Academic Press, 1987.
- [35] T. Froels. Auswertung und interpretation von höhenmessungen am blockgletscher macun, unterengadin. Studienarbeit am Geodätischen Institut der Universität Karlsruhe (TH), unveröffentlicht, 1994.
- [36] B. Heck. Das analyseverfahren des geodätischen instituts der universität karlsruhe - stand 1983. In W. Welsch, editor, *Deformationsanalyse '83. Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen geodätischer Netze*. Schriftenreihe, Studiengang Vermessungswesen, HSBw München, Heft 9, S. 153-182, 1983.
- [37] B. Heck. Zur geometrischen analyse von deformationen in lagenetzen. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Heft 10*, pages 357–364, 1984.
- [38] B. Heck. Geodätische arbeiten zum nachweis rezenter krustenbewegungen im bereich der oberrheingrabens. In H.-G. Wenzel and W. Zick, editors, *81. Deutscher Geodätentag 1997 in Karlsruhe. „Geodäsie - Technik für Raum und Recht“.*, pages 71–82. Deutscher Verein für Vermessungswesen (DVW). Schriftenreihe 27 / 1997, 1997.
- [39] B. Heck and B. Meier-Hirmer. Analyse geodätischer deformationsmessungen zur Überwachung des damms eines rückhaltebeckens. In K. Rinner, G. Schelling, and G. Brandstätter, editors, *Ingenieurvermessung '84. Beiträge zum IX. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessung, Graz 1984*. Dümmler, Bonn, 1984.
- [40] K. Heine. *Beschreibung von Deformationsprozessen durch Volterra- und Fuzzy-Modelle sowie Neuronale Netze*. PhD thesis, Technische Universität Carolo-Wilhelmina, Braunschweig, Deutsche Geodätische Kommission, München, Reihe C, Heft Nr. 516, 1999.
- [41] J. Hoschek and D. Lasser. *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. B.G. Teubner Stuttgart, 1992.
- [42] W. Höpcke. *Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung*. Walter de Gruyter, 1980.
- [43] K. Hutter. Continuum description of natural slopes in slow movement. In K. Hutter, editor, *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics*. Springer Verlag Wien - New York, 1993.
- [44] K-D. Kammeyer and K. Kroschel. *Digitale Signalverarbeitung: Filterung und Spektralanalyse*. B.G. Teubner Stuttgart, 1998.

- [45] M.J. Keedwell, editor. *International Conference on Rheology and Soil Mechanics: Proceedings of the International Conference on Rheology and Soil Mechanics held in Coventry, UK, 12 - 16 September 1988*, London, 1988. Elsevier Applied Science.
- [46] J. Klostermann. *Das Klima im Eiszeitalter*. E. Schweizerbart'sche Verlagsbuchhandlung (Nägele und Obermiller), Stuttgart, 1999.
- [47] K.R. Koch. *Parameterschätzung und Hypothesentests*. Dümmler, 1997.
- [48] H. Kronmüller. *Digitale Signalverarbeitung*. Springer-Verlag, 1991.
- [49] P. Lancaster and K. Salkauskas. *Curve and Surface Fitting*. Academic Press, 1986.
- [50] J. Lenz. Rheologie. Vorlesungsskript, 2. Auflage, Universität Karlsruhe, 1988.
- [51] J. Lenz. Kontinuumsmechanik i und ii für bauingenieurstudenten der vertiefungsrichtung grundbau (5). Vorlesungsskript, 3. Auflage, Universität Karlsruhe, 1993.
- [52] D.H. McLain. Two dimensional interpolation from random data. *The Computer Journal*, Bd. 19(Nr. 2):178–181, 1976.
- [53] G.M. Nielson and R. Franke. Surface construction based upon triangulation. In R.E. Barnhill and W. Böhm, editors, *Surfaces in Computer Aided Design*, pages 163–177. North-Holland, 1983.
- [54] W. Niemeier. Zur kongruenz mehrfach beobachteter geodätischer netze. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 88, 1979.
- [55] G. Nkuite. *Ausgleichung mit singulärer Kovarianzmatrix*. PhD thesis, Universität Karlsruhe (TH), Deutsche Geodätische Kommission, München, Reihe C, Heft Nr. 501, 1998.
- [56] F. Press and R. Siever. *Allgemeine Geologie*. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 1995.
- [57] M. Reiner. *Rheologie in elementarer Darstellung*. Carl Hanser Verlag, München, 1968.
- [58] J. Rohn. *Geotechnische Untersuchungen an einer Großhangbewegung in Bad Goisern (Oberösterreich)*. PhD thesis, Lehrstuhl für Angewandte Geologie der Universität Karlsruhe, 1991.
- [59] J. Rumbaugh, M. Blaha, W. Premerlani, F. Eddy, and W. Lorensen. *Objektorientiertes Modellieren und Entwerfen*. Carl Hanser Verlag, 1994.
- [60] R.M. Schmidt. Einstufige verfahren zur flächenapproximation unregelmäßig verteilter daten durch tensorprodukt-b-splines. Technical Report 268, Hahn-Meitner-Institut, Berlin, 1979.
- [61] R.M. Schmidt. Fitting scattered surface data with large gaps. In R.E. Barnhill and W. Böhm, editors, *Surfaces in Computer Aided Geometric Design*, pages 185–189. North-Holland, 1983.
- [62] R.M. Schmidt. Ein beitrag zur flächenapproximation über unregelmäßig verteilten daten. In W. Schlempp and K. Zeller, editors, *Multivariate Approximations Theory III*, pages 363–369. Birkhäuser, 1985.
- [63] G. Schmitt and P. Rawiel. The use of gps in geotechnical engineering - monitoring a land slide. In J.-G. Siefert, editor, *XVe rencontre universitaires de Génie Civil. Comparaison entre résultats expérimentaux et résultats de calculs. EC'97*, volume I, pages 27–35, Strasbourg, 1997.
- [64] U. Schneider. *Geotechnische Untersuchungen, satellitengestützte (GPS) Bewegungsanalysen und Standsicherheitsüberlegungen an einem Kriechhang in Ebnit, Vorarlberg*. PhD thesis, Geologisches Institut, Universität Karlsruhe, 1999.
- [65] A. Schreiner. *Einführung in die Quartärgeologie*. E. Schweizerbart'sche Verlagsbuchhandlung (Nägele und Obermiller), Stuttgart, 1992.
- [66] L.L. Schumaker. Fitting surfaces to scattered data. In G.G. Lorentz, C.K. Chui, and L.L. Schumaker, editors, *Approximation Theory II*, pages 203–268. Academic Press, 1976.
- [67] L.L. Schumaker. Triangulation methods. In C.K. Chui, L.L. Schumacher, and F.I. Utreras, editors, *Topics in Multivariate Approximation*, pages 219–232. Academic Press, 1987.

- [68] I.S. Sokolnikoff. *Tensor Analysis, Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. Wiley, New York, 1964.
- [69] B. Spain. *Vector Analysis*. Van Norstrand, London, 1965.
- [70] M.R. Spiegel. *Theory and Problems of Vectoranalysis and an Introduction to Tensor Analysis*. Schaum's Outline Series. Schaum Publ. Comp., New York, 1959.
- [71] E. Stärk. *Mehrfach differenzierbare Bézier-Kurven und Bézier-Flächen*. PhD thesis, Universität Braunschweig, 1976.
- [72] B. Stroustrup. *The C++ Programming Language*. Adison-Wesley, 1997.
- [73] W.F. Teskey. *Integrierte Analyse geodätischer und geotechnischer Daten sowie physikalischer Modelldaten zur Beschreibung des Deformationsverhaltens großer Erddämme unter statischer Belastung*. PhD thesis, Universität Stuttgart, 1988. Deutsche Geodätische Kommission, München, Reihe C, Heft Nr. 341.
- [74] K.N. Thome. *Einführung in das Quartär: Das Zeitalter der Gletscher*. Springer, 1977.
- [75] N. van Khoan. *Kinematische Modelle zur Erfassung von Hangrutschungen unter besonderer Berücksichtigung des erweiterten Kalmanfilters*. PhD thesis, Universität Hannover, 1992.
- [76] L. Vuillet and K. Hutter. Continuum model for natural slopes in slow movement. *Géotechnique*, Bd. 38(Nr. 2):199–217, 1988.
- [77] L. Vuillet and K. Hutter. Viscous-type sliding laws for landslides. *Canadian Geotechnical Journal*, Bd. 25:467–477, 1988.
- [78] W. Zick. Bewegungsmessungen 1965 - 1994 am blockgletscher macun i (unterengadin/schweiz) - neue ergebnisse. *Zeitschrift für Geomorphologie N.F.*, Suppl.-Bd. 104:59–71, 1996.
- [79] K. Zippelt. *Modellbildung, Berechnungsstrategie und Beurteilung von Vertikalbewegungen unter Verwendung von Präzisionsnivellements*. PhD thesis, Universität Karlsruhe (TH), Deutsche Geodätische Kommission, München, Reihe C, Heft Nr. 343, 1988.
- [80] R. Zurmühl and S. Falk. *Matrizen und ihre Anwendungen, Teil 1*. Springer-Verlag, 1984.
- [81] R. Zurmühl and S. Falk. *Matrizen und ihre Anwendungen, Teil 2*. Springer-Verlag, 1986.

## Anhang A

### Komponenten der Bewegungsfunktionen in Abhängigkeit der Koordinaten

## Anhang B

### Objektklassen für die Erstellung der Programme in C++ für die Beispielrechnung

#### B.1 Einleitung

Es sollen hier die Klassen und Funktionen erklärt werden, welche zur Beschreibung von Objekten einer Deformationsanalyse und für Berechnungen innerhalb der Deformationsanalyse programmiert wurden. Es wird beschrieben, woraus die Klassen bestehen und wie sie benutzt werden. Vektoren und Matrizen sind Klassen aus der C++-Matrizenbibliothek `Newmat09`. Sämtliche Berechnungen und Operationen mit Vektoren und Matrizen werden mit den Funktionen dieser Bibliothek durchgeführt. Es finden sich also für Vektor- und Matrixobjekte keine Beschreibungen in diesem Dokument. Es sei an dieser Stelle auf die `Newmat09`-Dokumentation (DAVIES [22]) verwiesen. Tensoren werden ebenfalls mit `Newmat09` verarbeitet. Sie sind zwar in `Newmat09` nicht als eigene Klassen realisiert, Tensoren 2. Stufe können jedoch in derselben Form wie Matrizen geschrieben werden und sie können rechnerisch auch wie Matrizen verarbeitet werden. Da in der Arbeit lediglich Tensoren 2. Stufe zur Anwendung kommen, genügen die Funktionen von `Newmat09`, um die notwendigen Berechnungen durchzuführen.

#### B.2 Die Klassen

##### B.2.1 `koo3d`

Die Klasse `koo3d` ist eine Klasse die eine 3D-Koordinate beschreibt. Sie enthält die folgenden Elemente:

privat:

- **epoche**: Epochennummer (double).
- **X**: x-Koordinate (double).
- **Y**: y-Koordinate (double).
- **Z**: z-Koordinate (double).

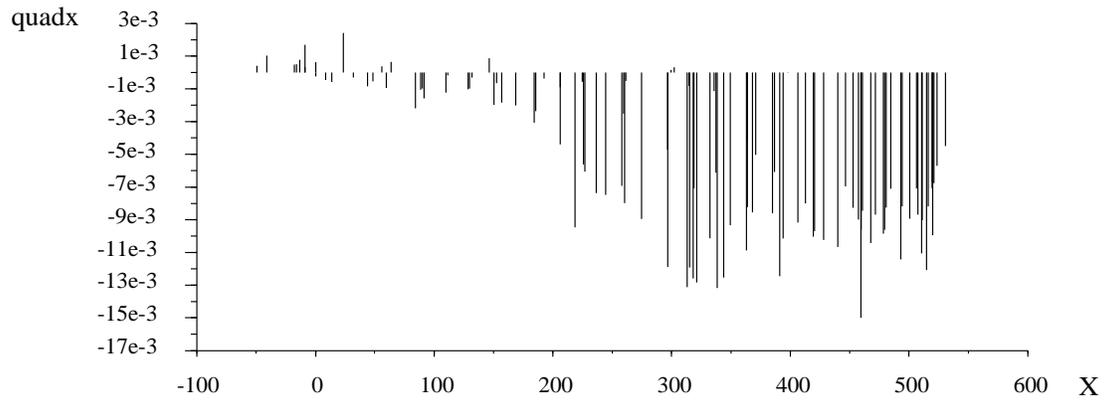
Wird eine 3D-Koordinate initialisiert, so werden als Parameter x-Wert, y-Wert, z-Wert und Epochennummer in dieser Reihenfolge übergeben.

Ihre Elementfunktionen sind:

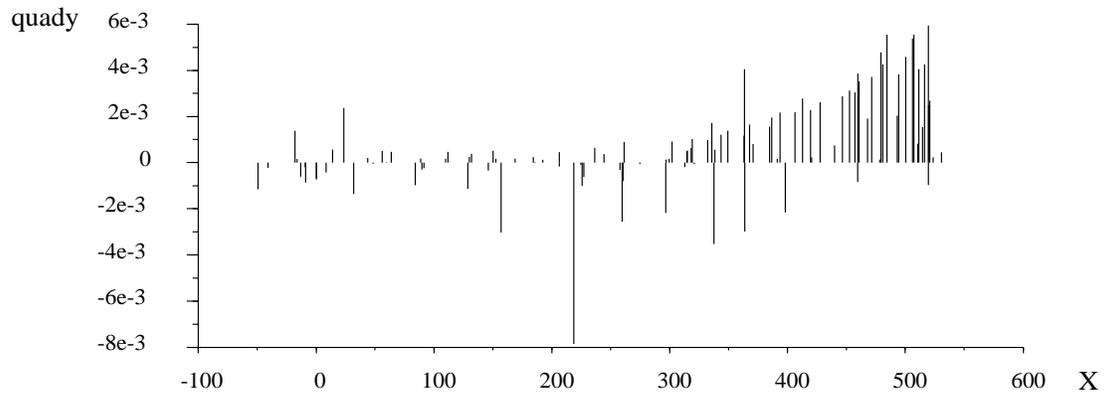
- **getepoche()** gibt als Wert die Epoche der 3D-Koordinate zurück.
- **getX()** gibt als Wert den X-Wert der 3D-Koordinate zurück.
- **getY()** gibt als Wert den Y-Wert der 3D-Koordinate zurück.
- **getZ()** gibt als Wert den Z-Wert der 3D-Koordinate zurück.
- **print(ostream& os)** übergibt die Werte epoche, X, Y, Z an den Ausgabestream os (in dieser Reihenfolge).
- **read (istream& is)** liest die Werte epoche, X, Y, Z vom Eingabestream is.
- die Operatoren `==`, `!=`, `<` und `>` vergleichen zwei 3D-Koordinaten miteinander.

Zwei 3D-Koordinaten sind gleich, wenn ihre Epochennummer gleich ist. Entsprechend verhalten sich die Operatoren `!=`, `<`, und `>`. Verglichen werden immer die Epochennummern der 3D-Koordinaten.

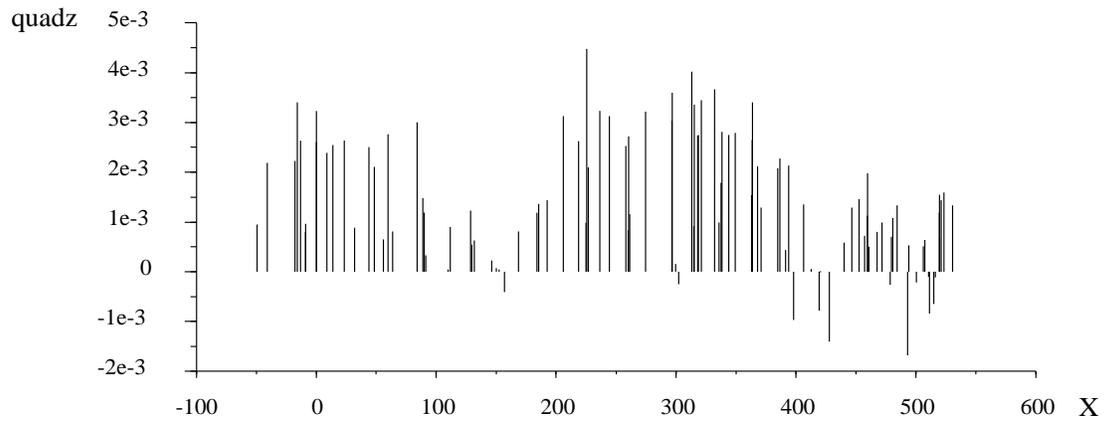
Die überladenen Operatoren `<<` bzw. `>>` rufen die Funktionen **print** bzw. **read** auf. Der Befehl



(a)

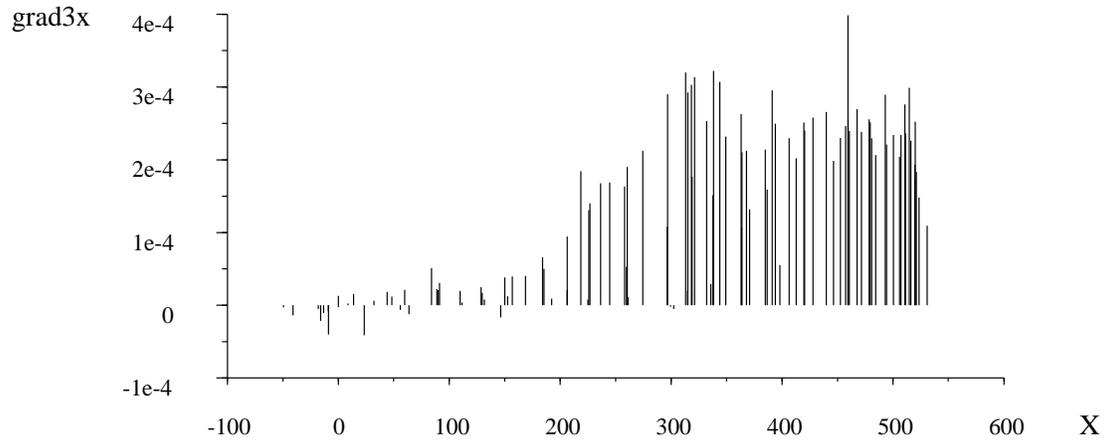


(b)

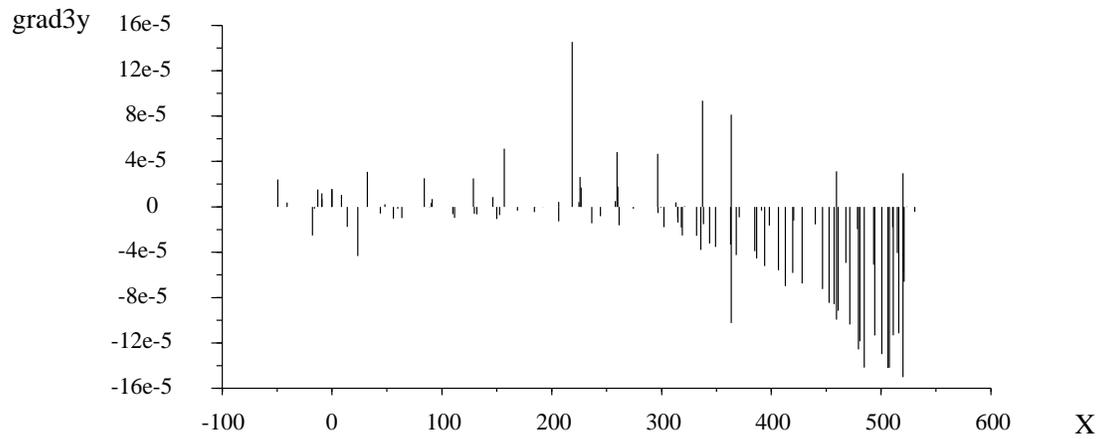


(c)

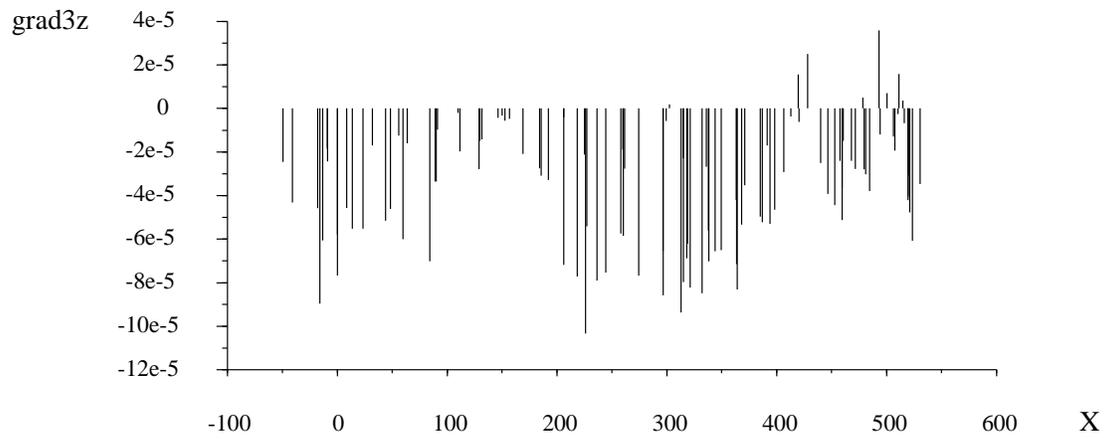
Abbildung A.1: Quadratische Bewegungskomponenten in Abhängigkeit von  $X$ .



(a)

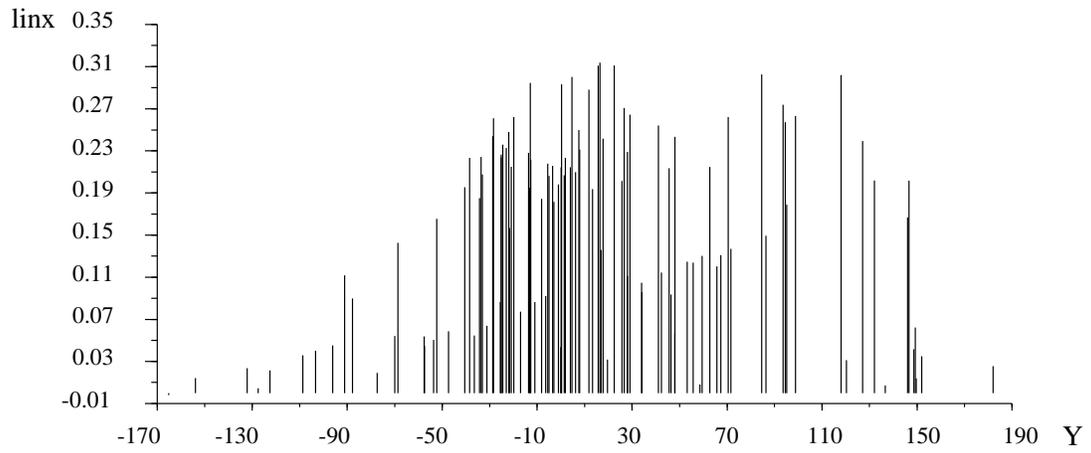


(b)

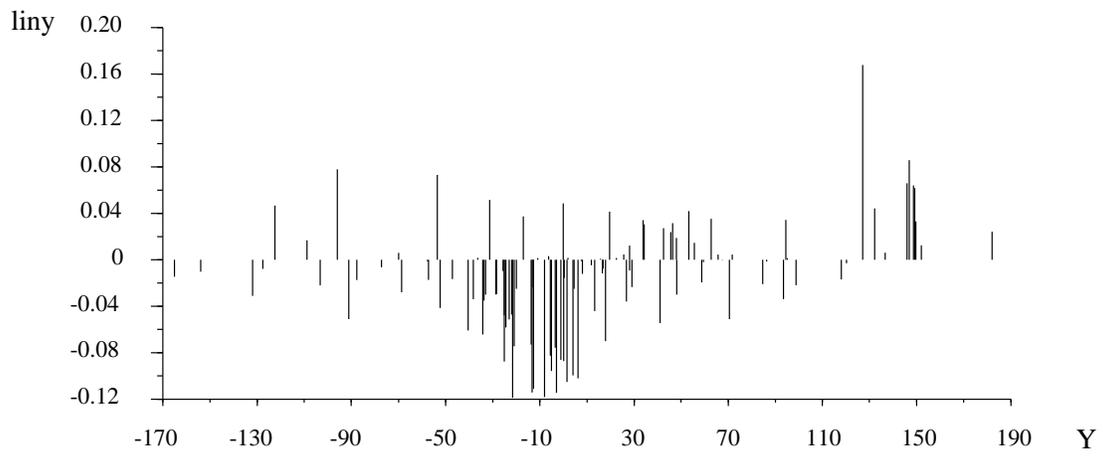


(c)

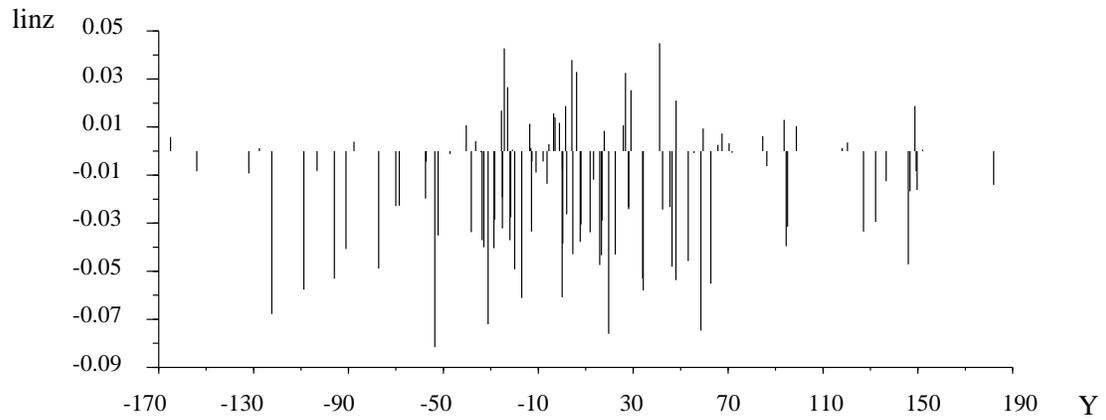
Abbildung A.2: Bewegungskomponenten 3. Grades in Abhängigkeit von  $X$ .



(a)

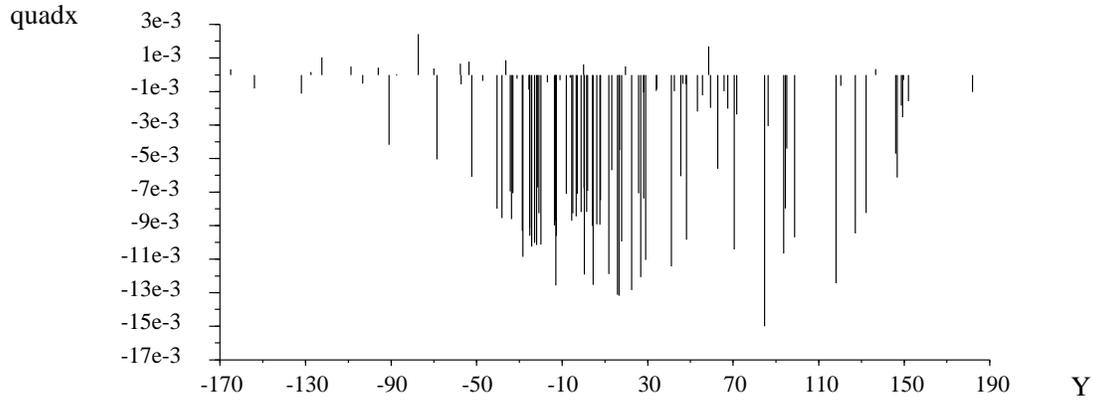


(b)

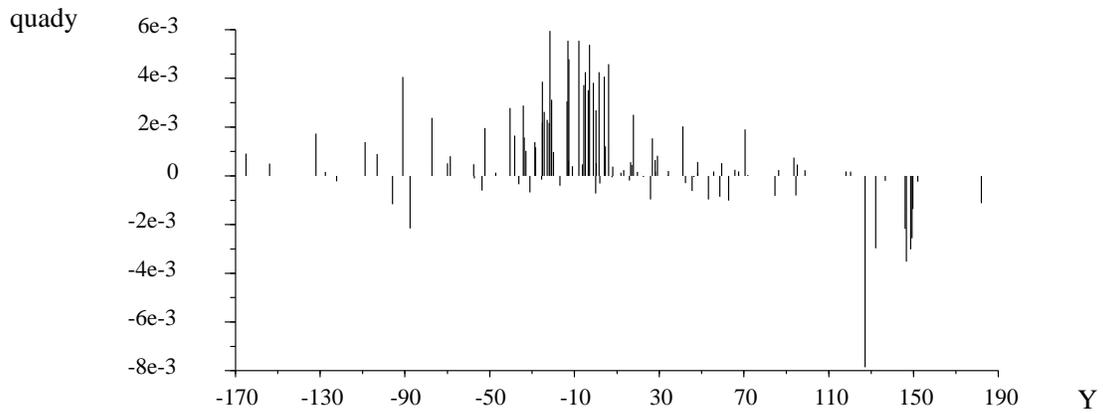


(c)

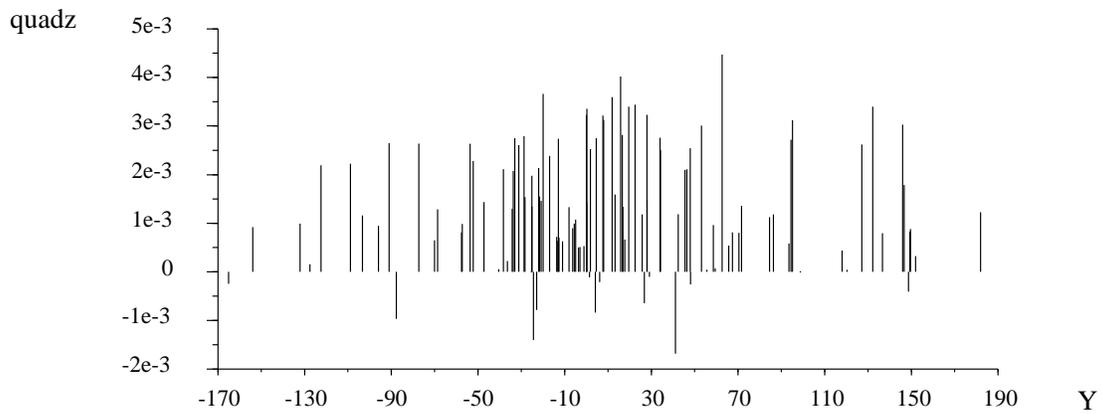
Abbildung A.3: Lineare Bewegungskomponenten in Abhängigkeit von  $Y$ .



(a)

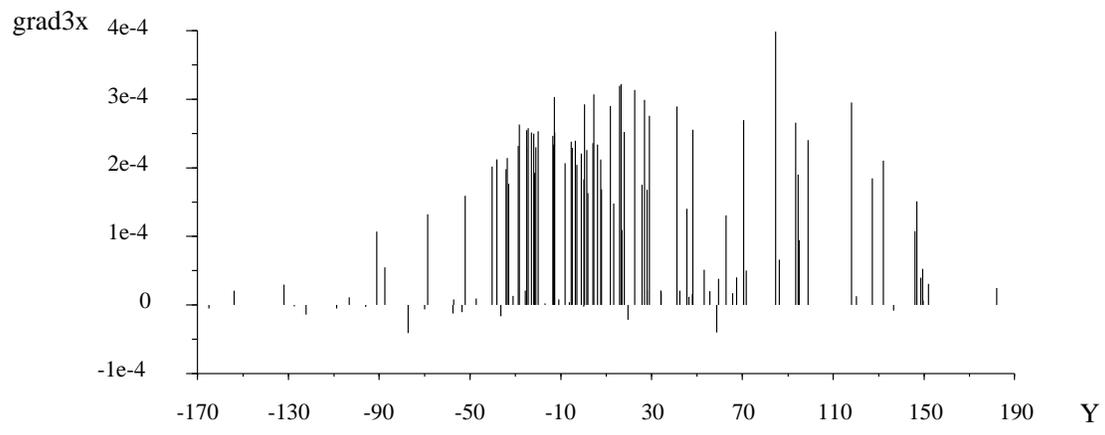


(b)

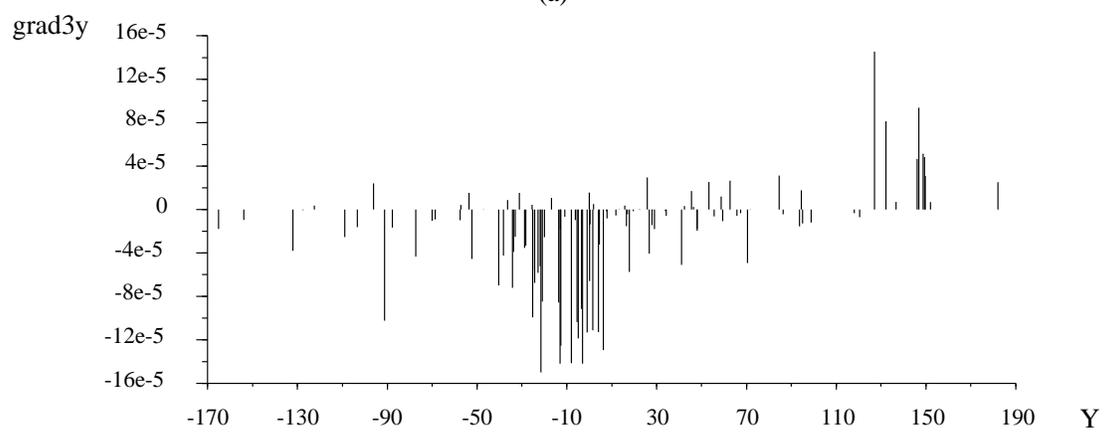


(c)

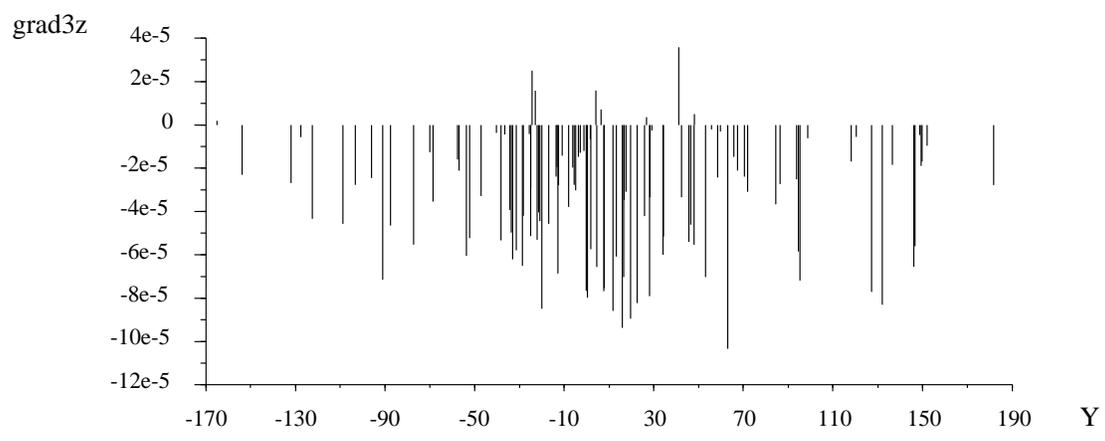
Abbildung A.4: Quadratische Bewegungskomponenten in Abhängigkeit von  $Y$ .



(a)

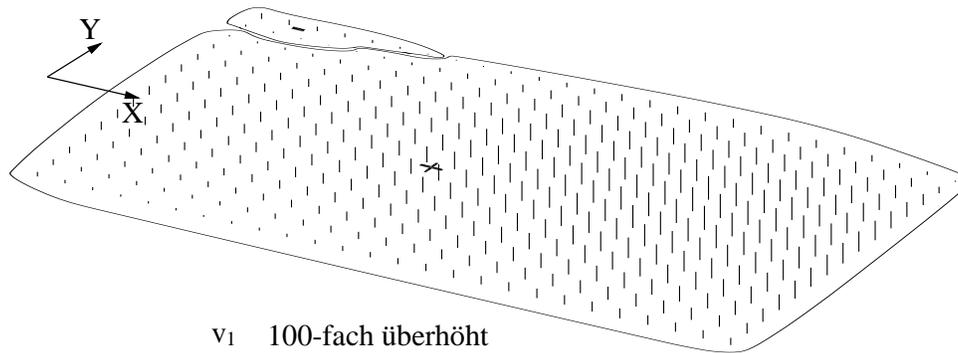


(b)

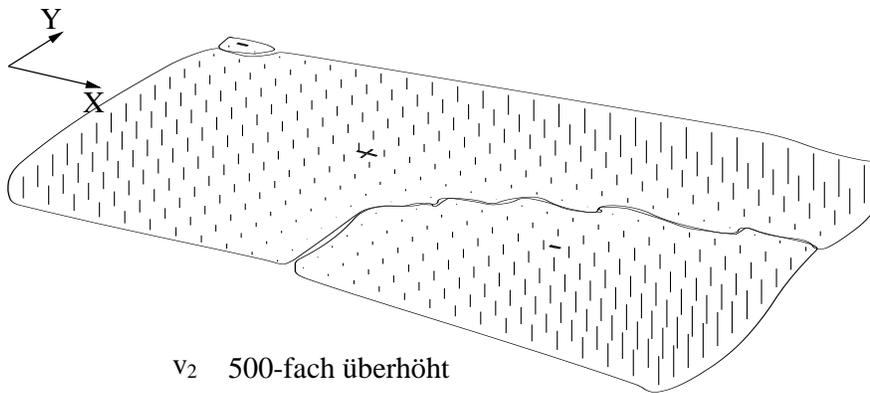


(c)

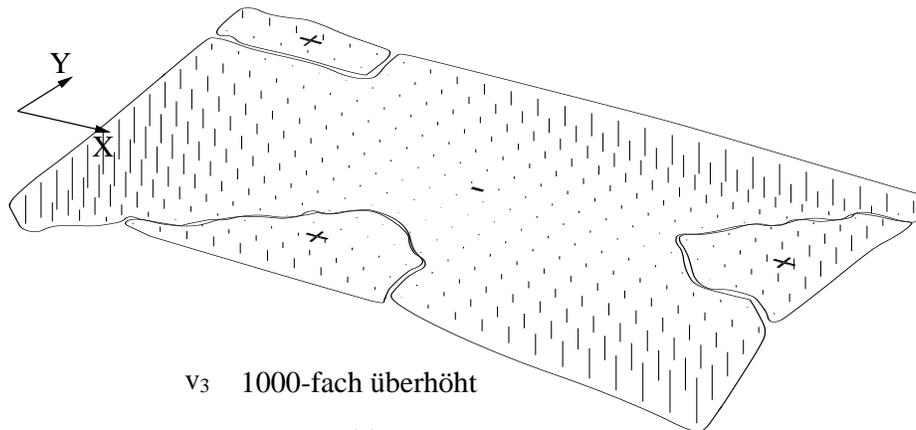
Abbildung A.5: Bewegungskomponenten 3. Grades in Abhängigkeit von  $Y$ .



(a)

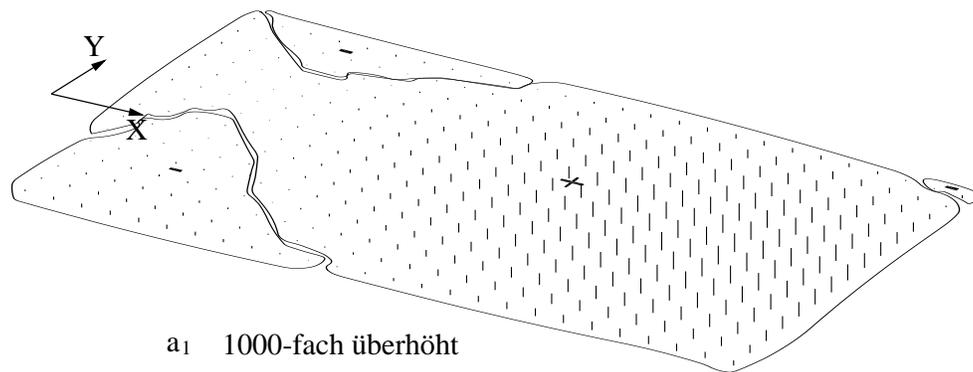


(b)



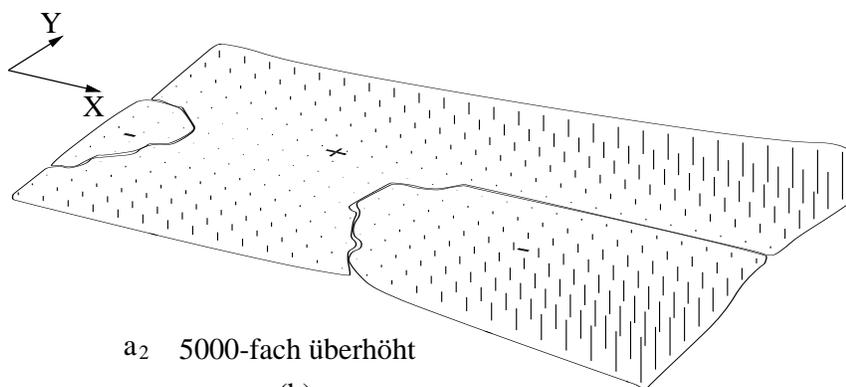
(c)

Abbildung A.6: Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $\bar{v}$  für  $t = 22$ .



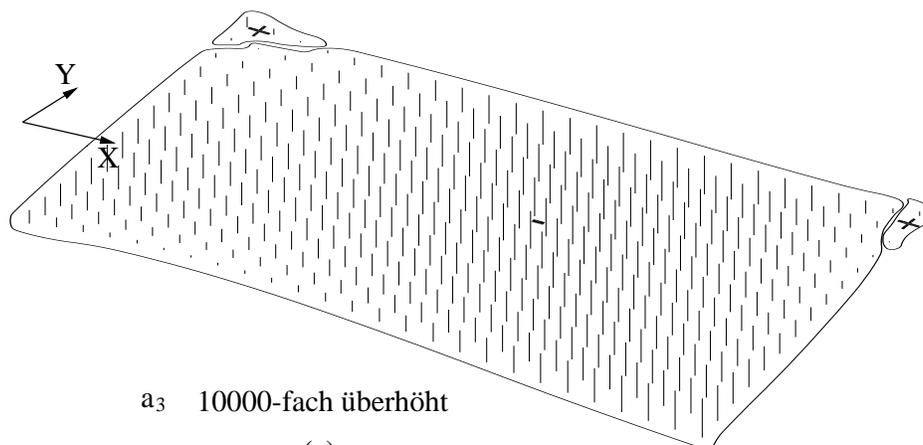
a<sub>1</sub> 1000-fach überhöht

(a)



a<sub>2</sub> 5000-fach überhöht

(b)



a<sub>3</sub> 10000-fach überhöht

(c)

Abbildung A.7: Komponenten des Beschleunigungsvektors  $\bar{a}$  für  $t = 22$ .

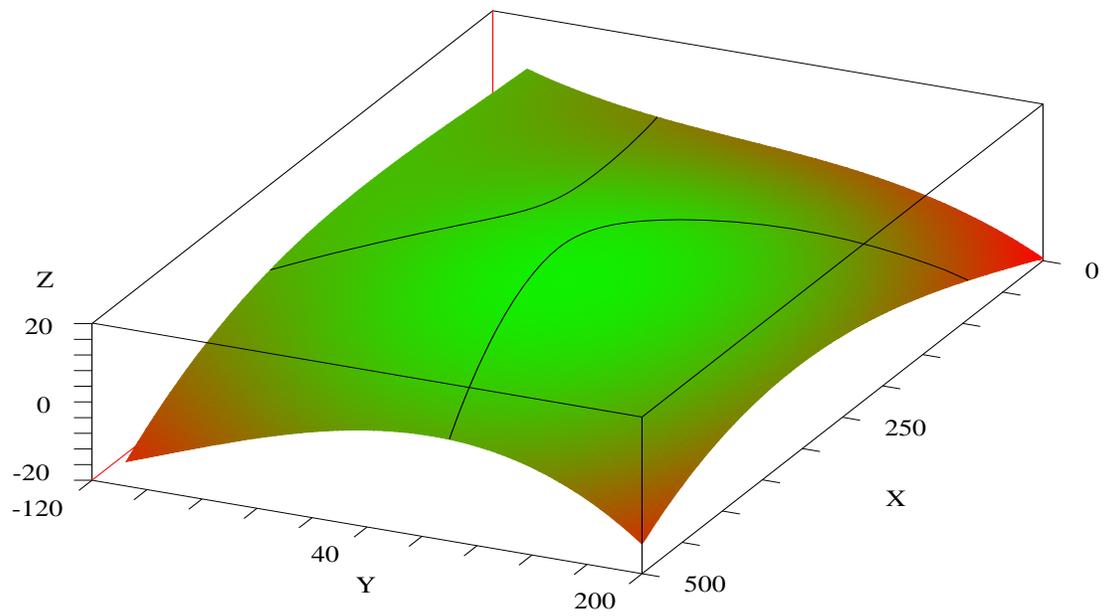


Abbildung A.8: Linie, auf der die Rotation um die  $X$ -Achse zu null wird.

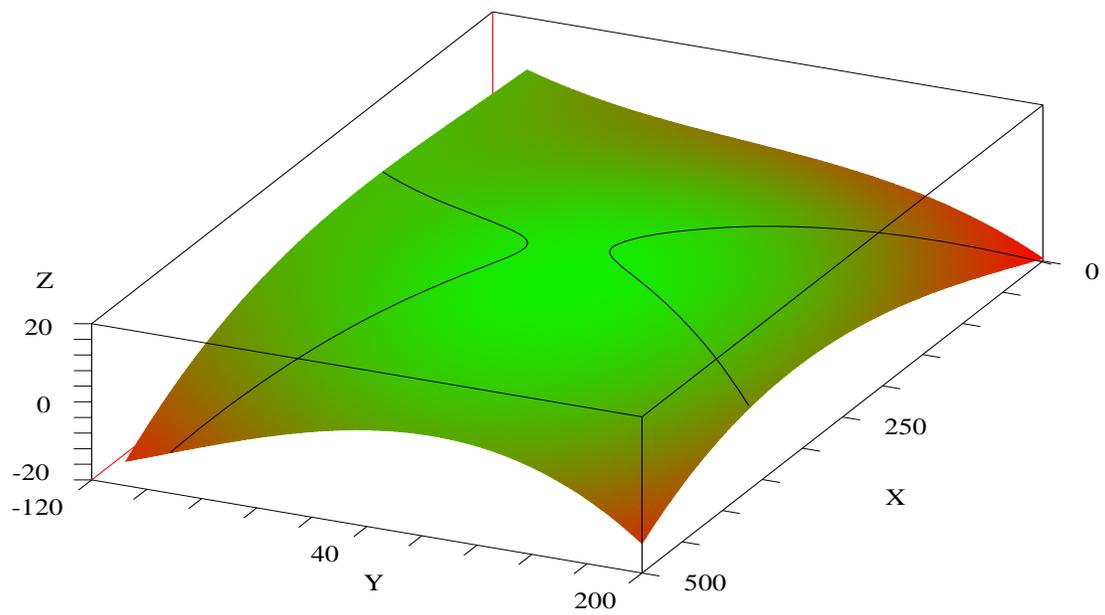


Abbildung A.9: Linie, auf der die Rotation um die  $Y$ -Achse zu null wird.

```
cout << koo3d;
```

gibt die Epochenummer, den X-, Y-, und den Z-Wert der 3D-Koordinate *koo3d* auf dem Bildschirm aus.

### B.2.2 def\_punkt3d

Die Klasse *def\_punkt3d* ist eine Klasse, die einen Objektpunkt einer Epochenmessung beschreibt. Sie enthält die folgenden Elemente:

private:

- **pnr**: Punktnummer (integer)
- **koord\_sys**: Kennziffer Koordinatensystem (0= Gauß -Krüger, 1= lokales System)
- **Koord\_liste**: Liste aus 3D-Koordinaten.

Als Elementfunktionen enthält die Klasse zwei Konstruktoren, die es erlauben, einen *def\_punkt3d* ohne Parameter zu initialisieren (*pnr* =0, *koord\_sys* =0, die Koordinatenliste bleibt leer) oder mit Punktnummer, Kennziffer für das Koordinatensystem und 3D-Koordinate (die übergebene 3D-Koordinate wird an die bestehende Koordinatenliste angehängt).

Elementfunktionen, mit denen die Elemente für das Programm verfügbar gemacht werden, sind:

- **getkoo()** gibt die Koordinatenliste des Punktes zurück.
- **getX()** gibt den X-Wert der ersten 3D-Koordinate der Liste zurück.
- **getY()** gibt den Y-Wert der ersten 3D-Koordinate der Liste zurück.
- **getZ()** gibt den Z-Wert der ersten 3D-Koordinate der Liste zurück.
- **getX(const double& epoche)** gibt den X-Wert einer bestimmten Epoche zurück. Falls die Epoche in der Koordinatenliste nicht vorhanden ist, werden die Koordinaten der nächsten gemessenen Epoche zurückgegeben. Falls es keine nächste gemessene Epoche gibt, wird die zuletzt gemessene ausgegeben. Zu diesen beiden Fällen kommt noch eine entsprechende Meldung auf den Bildschirm.
- **getY(const int& epoche)** verhält sich analog **getX(const double& epoche)**.
- **getZ(const int& epoche)** verhält sich analog **getX(const double& epoche)**.
- **get\_erste\_epoche()** gibt die Nummer der ersten Epoche des Punktes zurück.
- **getpnr()** gibt die Nummer des Punktes zurück.
- **getkoord\_sys()** gibt die Kennziffer für das Koordinatensystem zurück.
- **getkoo3d(const double& epoche)** gibt die 3D-Koordinate einer bestimmten Epoche zurück. Falls die Epoche nicht vorhanden ist, verhält sich die Methode wie die Methoden **getX(const double& epoche)** ...
- **getepovec()** gibt alle Epochen, in denen der Punkt gemessen wurde in einem Spaltenvektor (**ColumnVector** aus Newmat09) zurück.
- **getXvec()** gibt die X-Koordinaten aller Epochen des Punktes in einem Spaltenvektor zurück.
- **getYvec()** gibt die Y-Koordinaten aller Epochen des Punktes in einem Spaltenvektor zurück.
- **getZvec()** gibt die Z-Koordinaten aller Epochen des Punktes in einem Spaltenvektor zurück.

Weitere Elementfunktionen, mit denen Werte gesetzt und Berechnungen durchgeführt werden, sind:

- **epoche\_vorhanden(const double& epoche)** prüft, ob der Punkt in einer bestimmten Epoche vorhanden ist.
- **setkoord\_sys(int koord\_sys)** setzt die Kennziffer für das Koordinatensystem.
- **add\_k3d(pr\_koo3d k3d)** fügt eine 3D-Koordinate hinten an die Koordinatenliste des Punktes an.
- **Strecke\_nach(def\_punkt3d& P3d)** berechnet die Raumstrecke zu einem 2. Punkt.
- **Richtung\_nach(def\_punkt3d& P3d)** berechnet die Richtung zu einem 2. Punkt.
- **Neigung\_nach(def\_punkt3d& P3d)** berechnet die Neigung zu einem 2. Punkt.
- **GK\_nach\_XYZ( t, alpha, dx, dy, dz)** transformiert die Koordinaten von einem System in das andere. Übergeben werden Drehwinkel  $t$  um die Höhen-Achse, Drehwinkel  $\alpha$  um die Y-Achse, und drei Translationen. Die Funktion gibt einen **def\_punkt3d** zurück.
- die Operatoren **==**, **!=**, **<** und **>** vergleichen zwei Punkte miteinander. Zwei Punkte sind gleich, wenn ihre Punktnummern gleich sind. Entsprechen verhalten sich die operatoren **!=**, **<**, und **>**. Verglichen werden immer die Punktnummern der Objektpunkte.

Die folgenden Elementfunktionen berechnen die Koeffizienten eines Polynoms, das den Verlauf der Koordinate in Abhängigkeit der Zeit beschreibt.

- **berechne\_bew\_param\_1grad(ColumnVector t, ColumnVector l)** berechnet anhand der Epochen und der Koordinaten des *def\_punkt3d* ein Polynom 1. Grades, das die Koordinate  $X$ ,  $Y$  oder  $Z$  in Abhängigkeit der Zeit  $t$  darstellt ( $X = a_0 + a_1t$ ). Übergeben werden an diese Funktion die Epochen und die  $X$ ,  $Y$ , oder  $Z$ -Koordinaten, jeweils als Spaltenvektor. Zurückgegeben wird ein Zeilenvektor (**RowVector** aus Newmat09) mit 4 Elementen  $a_0, a_1, 0, 0$ . Die letzten beiden Elemente des Vektors (quadratischer und kubischer Anteil der Bewegungsfunktion) werden zu 0 gesetzt.
- **berechne\_bew\_param\_2grad(ColumnVector t, ColumnVector l)** berechnet ein Polynom 2. Grades, gibt ebenfalls einen Zeilenvektor mit 4 Elementen zurück, wobei nur der kubische Anteil zu 0 gesetzt wird.
- **berechne\_bew\_param\_3grad(ColumnVector t, ColumnVector l)** berechnet ein Polynom 3. Grades und gibt den voll besetzten Zeilenvektor mit den Parametern  $a_0$  bis  $a_3$  zurück.

Jede dieser obigen Funktionen macht eine Abfrage, ob genügend Epochen gemessen sind, um die Berechnung durchzuführen. Falls nicht genügend Epochen vorhanden sind, wird der Nullvektor zurückgegeben.

Die folgenden Elementfunktionen berechnen die Parameter, die ein Objekt der Klasse *kin\_punkt3d* definieren und geben dieses Objekt zurück.

- **make\_kin\_punkt3d(const double nullepoche)** berechnet für den *def\_punkt3d* die Koeffizienten der Bewegungsfunktion für alle drei Koordinaten. Als Übergabewert benötigt die Funktion die Nullepoche des Deformationsprojekts, d. h. den Zeitpunkt  $t_0$  auf den sich die Bewegungsfunktion bezieht. Zurückgegeben wird ein Objekt der Klasse *kin\_punkt3d* (siehe B.2.3). Es wird eine Abfrage gemacht, in wievielen Epochen der Punkt gemessen wurde, und dementsprechend werden 1-, 2- oder 3-gradige Polynome berechnet.
- **make\_kin\_punkt3d\_1grad(const double nullepoche)**, **-2grad(const double nullepoche)** und **-3grad(const double nullepoche)** tun dasselbe wie **make\_kin\_punkt3d(const double nullepoche)** mit dem Unterschied, dass sie eben nur 1-, 2- bzw. 3-gradige Polynome berechnen.

Die folgenden Elementfunktionen berechnen Werte, mit denen sich die Qualität der durch Ausgleichung berechneten Koeffizienten abschätzen lässt.

- **out\_vtpv(ColumnVector t, ColumnVector l, const double nullepoche)** berechnet die Fehlerquadratsumme  $v^T P v$  der Berechnung der Koeffizienten der Bewegungsfunktion für eine Koordinate.
- **out\_eigenvalues(ColumnVector t, ColumnVector l, const double nullepoche)** berechnet die Eigenwerte der Normalgleichungsmatrix, mit der die Koeffizienten der Bewegungsfunktion berechnet wurden.

Die folgenden Funktionen und Operatoren machen das Einlesen von einem Eingabestream und das Ausgeben auf einen Ausgabestream möglich:

- **print(ostream& os)** gibt die Koordinaten des Punktes zu jeder epoche mit Punktnummer, Epoche und Kennziffer für das Koordinatensystem auf den Ausgabestream **os**.
- **read(istream& is)** liest einen Punkt vom Eingabestream **is** ein. (**pnr**, **epoche**, **X**, **Y** und **Z**). Liest die Koordinaten aller Epochen und fügt den Koordinatensatz jeder Epoche an die Koordinatenliste an. Sortiert dann die Koordinatenliste nach Epochen.
- Die überladenen Operatoren << bzw. >> rufen die Funktionen **print** bzw. **read** auf.

### B.2.3 kin\_punkt3d

Die Klasse *kin\_punkt3d* beschreibt einen Objektpunkt einer Deformationsmessung, und zwar nicht wie die Klasse *def\_punkt3d* mit einer Liste von Koordinaten zu verschiedenen Epochen, sondern durch drei Polynome 3. Grades, welche die drei Koordinaten des Punktes in Abhängigkeit der Zeit darstellen.

$$\begin{aligned} X &= a_0 + a_1 * t + a_2 * t^2 + a_3 * t^3, \\ Y &= b_0 + b_1 * t + b_2 * t^2 + b_3 * t^3, \\ Z &= c_0 + c_1 * t + c_2 * t^2 + c_3 * t^3. \end{aligned}$$

Sie enthält die folgenden Elemente:

private:

- **pnr**: Punktnummer (integer).
- **bewX**: Zeilenvektor (Newmat09) mit den Koeffizienten der Bewegungsfunktion in X-Richtung.
- **bewY**: Zeilenvektor (Newmat09) mit den Koeffizienten der Bewegungsfunktion in Y-Richtung.
- **bewZ**: Zeilenvektor (Newmat09) mit den Koeffizienten der Bewegungsfunktion in Z-Richtung.

Als Elementfunktionen enthält die Klasse einen Konstruktor, der es erlaubt, einen *kin\_punkt3d* mit einem Parameter, nämlich der Punktnummer, zu initialisieren. Die Koeffizienten der Bewegungsfunktion (d.h. die Elemente der drei Zeilenvektoren) werden dabei zu 0 gesetzt.

Weitere Elementfunktionen sind:

- **getpnr()** gibt die Nummer des Punktes zurück.
- **getX0(),getY0(),getZ0()** geben die X0, Y0 bzw.Z0-Koordinate (zur Zeit t=0) zurück.
- **getbewX(), getbewY()** und **getbewZ()** geben die vier Koeffizienten der Bewegungsfunktion in Form eines Zeilenvektors zurück.
- **setbewX(RowVector X)** setzt den Zeilenvektor für die Bewegungsparameter in X- Richtung.
- **setbewY(RowVector Y)** setzt den Zeilenvektor für die Bewegungsparameter in Y- Richtung.
- **setbewZ(RowVector Z)** setzt den Zeilenvektor für die Bewegungsparameter in Z- Richtung.
- **print(ostream& os)** gibt die Punktnummer und die Bewegungsparameter in die drei Achsrichtungen auf den Ausgabestream **os**.
- **read(istream& is)** liest einen Punkt vom Eingabestream **is** ein.
- **make\_v(double t)** berechnet die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors des Punktes zur Zeit t und gibt diesen als Zeilenvektor zurück.
- **make\_U(double t)** berechnet die Komponenten des Verschiebungsvektors des Punktes zur Zeit t und gibt diesen als Zeilenvektor zurück.

Die Operatoren ==, !=, < und > vergleichen zwei Punkte miteinander. Zwei Punkte sind gleich, wenn ihre Punktnummern gleich sind. Entsprechen verhalten sich die Operatoren !=, < und >. Verglichen werden immer die Punktnummern der Objektpunkte

Die überladenen operatoren << bzw. >> rufen die Funktionen **print** bzw. **read** auf.

### B.2.4 def\_project

Die Klasse *def\_project* ist eine Klasse, die ein ganzes Deformationsprojekt beschreibt. Die Klasse enthält als private Elemente keine Punkte mehr, sondern nur noch Zeilenvektoren, welche die Parameter für die Bewegungsfunktionen beinhalten. Diese Parameter der Bewegungsfunktionen sind in 9 solcher Zeilenvektoren enthalten. Die Länge der Zeilenvektoren beträgt je 10 Elemente.

Die Vektoren sind:

- *linx* für die lineare Komponente der zeitabhängigen Bewegungsfunktion in X-Richtung
- *liny* wie *linx*, nur für die Y-Richtung
- *linz* wie *linx* und *liny* für die Z-Richtung
- *quadx* für die quadratische Komponente der zeitabhängigen Bewegungsfunktion in X-Richtung
- *quady* wie *quadx*, nur die Y-Richtung
- *quadz* wie *quadx* und *quady* für die Z-Richtung
- *grad3x* für die Komponente 3. Grades der zeitabhängigen Bewegungsfunktion in X-Richtung
- *grad3y* wie *grad3x*, nur für die Y-Richtung
- *grad3z* wie *grad3x* und *grad3y* für die Z-Richtung

Die Parameter der zeitabhängigen Bewegungsfunktionen werden für jeden einzelnen Punkt durch eine Ausgleichung berechnet. Als Funktion werden Polynome 3. Grades (2.2-1) als funktionales Modell angenommen. Das heißt, die Verschiebungsvektoren der einzelnen Punkte sind durch 3 Parameter für jede Achsrichtung bestimmt. Jeder dieser Parameter wurde dann noch einmal flächenhaft in Abhängigkeit von X und Y interpoliert. Die Interpolation besteht in einer ausgleichenden Fläche 3. Grades durch die Datenpunkte. Für die 3 x 3 Parameter der Verschiebungsvektoren wurde also jeweils eine Fläche 3. Grades berechnet, daher die 9 Zeilenvektoren, die das *def\_project* definieren.

Dem Konstruktor der Klasse wird als Parameter lediglich eine Liste von Punkten der Klasse *kin\_punkt3d* übergeben. Die 9 Zeilenvektoren werden im Konstruktor mit Hilfe der Funktion **flaechen\_parameter** (siehe B.3.2) berechnet.

Als weitere Elementfunktionen zur Rückgabe der einzelnen Vektoren und zum expliziten Besetzen der Vektoren stehen folgende Funktionen zur Verfügung:

- **setlinx(RowVector X)**
- **setliny(RowVector Y)**
- **setlinz(RowVector Z)**
- **getlinx()**
- **getliny()**
- **getlinz()**
- **setquadx(RowVector X)**
- **setquady(RowVector Y)**
- **setquadz(RowVector Z)**
- **getquadx()**
- **getquady()**
- **getquadz()**
- **setgrad3x(RowVector X)**

- **setgrad3y(RowVector Y)**
- **setgrad3z(RowVector Z)**
- **getgrad3x()**
- **getgrad3y()**
- **getgrad3z()**

Darauf folgen die Funktionen zur Berechnung verschiedenener Deformationsmaße, die in der Kontinuumsmechanik zur Deformationsanalyse benutzt werden. Die für die Deformationsmaße verwendeten Bezeichnungen entsprechen denen, die in der Kontinuumsmechanik üblicherweise benutzt werden.

- **make\_U(double X, double Y, double t)** berechnet den Verschiebungsvektor  $\bar{u}$  eines Punktes an der Stelle  $X, Y$  zur Zeit  $t$ . Der Rückgabewert der Funktion ist ein Spaltenvektor mit 3 Elementen, nämlich den Verschiebungen des Punktes in die drei Achsrichtungen zwischen den Zeitpunkten  $t_0$  und  $t$ .
- **make\_v(double X, double Y, double t)** berechnet den Geschwindigkeitsvektor  $\bar{v}$  eines Punktes an der Stelle  $X, Y$  zur Zeit  $t$ .
- **make\_a(double X, double Y, double t)** berechnet den Beschleunigungsvektor  $\bar{a}$  eines Punktes an der Stelle  $X, Y$  zur Zeit  $t$ .
- **make\_GradU(double X, double Y, double t)** berechnet den Verschiebungsgradiententensor  $\text{Grad } \bar{u}$  an der Stelle  $X, Y$  zur Zeit  $t$ .
- **make\_F(double X, double Y, double t)** berechnet den Deformationsgradiententensor  $\underline{F}$  an der Stelle  $X, Y$  zur Zeit  $t$ .
- **make\_E(double X, double Y, double t)** berechnet den Greenschen Verzerrungstensor  $\underline{E}$  an der Stelle  $X, Y$  zur Zeit  $t$ .
- **make\_Eps(double X, double Y, double t)** berechnet den infinitesimalen Deformationstensor  $\underline{\varepsilon}$  an der Stelle  $X, Y$  zur Zeit  $t$ .
- **make\_Omega(double X, double Y, double t)** berechnet den infinitesimalen Drehtensor  $\underline{\Omega}$  an der Stelle  $X, Y$  zur Zeit  $t$ .
- **make\_Drehvektor(double X, double Y, double t)** berechnet den Drehvektor  $\bar{\omega}$  an der Stelle  $X, Y$  zur Zeit  $t$ .
- **make\_keine\_Drehung\_X(double t)** berechnet die Parameter zur Bestimmung der Orte, an denen keine Drehung um die  $X$ -Achse vorkommt.
- **make\_keine\_Drehung\_y(double t)** berechnet die Parameter zur Bestimmung der Orte, an denen keine Drehung um die  $Y$ -Achse vorkommt.
- **make\_keine\_Drehung\_Z(double t)** berechnet die Parameter zur Bestimmung der Orte, an denen keine Drehung um die  $Z$ -Achse vorkommt.

Die Parameter der letzten drei Elementfunktionen werden in Form eines Spaltenvektors zurückgegeben. Sie sind die sechs Koeffizienten einer quadratischen Fläche der Form

$$F = a_0 + a_1X + a_2Y + a_3X^2 + a_4XY + a_5Y^2$$

Diese Fläche zu Null gesetzt ergibt die Linie, auf der die Rotation um die jeweilige Achse verschwindet.

## B.3 Funktionen

### B.3.1 erste\_epoche(list<def\_punkt3d> Punktliste)

Der Funktion **erste\_epoche** muss eine Liste von Punkten der Klasse *def\_punkt3d* übergeben werden. Es wird dann die kleinste Jahreszahl der Epochen aller Punkte zurückgegeben. Der Rückgabewert ist ein Wert vom Typ **const double**. Deklariert ist die Funktion im Header-File `defana.h`. Programmiert ist sie im File `erste_epo.cpp`.

### B.3.2 flaechen\_parameter(ColumnVector X, ColumnVector Y, ColumnVector l)

Die Funktion `flaechen_parameter` berechnet eine ausgleichende Fläche 3. Grades durch vorhandene Datenpunkte. Sie benötigt dafür Beobachtungen  $l_i$  an den Stellen  $X_i, Y_i$ . Diese müssen in Form von drei Spaltenvektoren in der Reihenfolge  $X, Y, l$  an die Funktion übergeben werden. Das funktionale Modell für die Fläche, die berechnet wird, sieht folgendermaßen aus:

$$z = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3$$

Zurückgegeben wird von der Funktion ein Zeilenvektor mit den 10 Elementen  $a_0$  bis  $a_9$ . Deklariert ist die Funktion im Header-File `defana.h`. Programmiert ist sie im File `Flaech_param.cpp`.

### B.3.3 Funktionen zur dxf-Ausgabe

Verschiedene Funktionen zur grafischen Darstellung einiger Deformationsanalyseergebnisse in AutoCad wurden im File `dxfl_out.cpp` programmiert. Die Deklarationen der Funktionen finden sich im File `output.h`.

- `dxfl_begin(ostream& out)` schreibt den absolut notwendigen Teil für den Beginn eines dxf-Files auf den Ausgabestream `out`.
- `dxfl_end(ostream& out)` schreibt den absolut notwendigen Teil für das Ende eines dxf-Files auf den Ausgabestream `out`.
- `draw_circle(ostream& out, double X, double Y, double Erhebung, int Skalierung, double Radius)` zeichnet einen Kreis an eine Stelle  $X, Y$  und gibt ihm eine Erhebung. Die Erhebung entspricht dem Deformationsmaß welches dargestellt werden soll. Wenn an die Funktion keine Skalierung übergeben wird, so wird diese standardmäßig auf 1000 gesetzt. Wird der Funktion kein Radius für den Kreis übergeben, so wird dieser standardmäßig auf 1 gesetzt.
- `draw_line(ostream& out, double X, double Y, double deltaX, double deltaY, double deltaZ, int Skalierung=1000)` zeichnet eine Linie von einem Punkt  $X, Y, (Z = 0!)$  ausgehend zum Punkt  $X + deltaX, Y + deltaY, 0 + deltaZ$ . Wird der Funktion kein Wert für die Skalierung übergeben, wird die Linie standardmäßig mit dem Faktor 1000 skaliert. Die Linie wird in Abhängigkeit der Vorzeichen von  $deltaX$  und  $deltaY$  in verschiedenen Farben gezeichnet.
- `draw_text(ostream& out, double X, double Y, int pnr)` schreibt die Punktnummer eines Punktes (oder eine integer Zahl) an die Stelle  $X + 5, Y + 5 (Z = 0)$ .
- `draw_punkt(ostream& out, double X, double Y, int pnr)` Zeichnet einen kleinen Kreis und die Punktnummer an die Stelle  $X, Y$ .

## Lebenslauf

Name, Vornamen	Rawiel, Paul Josef
17. Juli 1965	geboren in Schramberg
1971 -1975	Grundschule in Schramberg
1975 - 1984	Gymnasium Schramberg
1984 - 1985	Grundwehrdienst in Sulz a.N.
1986 - 1994	Studium des Vermessungswesens an der Universität Karlsruhe (TH)
1994 - 1995	Angestellter am Max-Planck-Institut für Limnologie in Plön
1995 - 2000	wissenschaftlicher Angestellter am Geodätischen Institut der Universität Karlsruhe (TH)